Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 29.11.2017
Aufgabenblatt 6

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Für ein festes $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim_n$ auf $\mathbb{Z}$ durch $x \sim_n y$, wenn $x-y$ durch n teilbar ist. Sei $\mathbb{Z}_n$ die Menge aller Äquivalenzklassen. Wir definieren die Operationen $+_n$ und $\cdot_n$ auf $\mathbb{Z}_n$: $[x]+_n[y] := [x+y]$, $[x]\cdot_n[y] := [x\cdot y]$.
   (i) Zeigen Sie, dass diese Operationen wohldefiniert sind, d.h. wenn $x \sim_n x'$ und $y \sim_n y'$, dann gilt $[x + y] = [x' + y']$ und $[x \cdot y] = [x' \cdot y']$.
   (ii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring ist.
   (iii) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$ ein Körper ist. Ist $(\mathbb{Z}_4, +_4, \cdot_4)$ auch ein Körper?
   (iv) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ kein Körper ist, wenn n keine Primzahl ist.
   (v) Sei p eine Primzahl und sei $[a] \in \mathbb{Z}_p \setminus \{[0]\}$. Die Funktion $l_{[a]} : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ sei definiert durch $l_{[a]}([x]) := [a] \cdot_p [x]$. Zeigen Sie, dass $l_{[a]}$ eine injektive Funktion ist. Nutzen Sie diese Information um zu zeigen, dass $\mathbb{Z}_p$ ein Körper ist.

2. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper und sei $1 \in \mathbb{K}$ das neutrale Element der Multiplikation. Mit $n1$, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir die n-fache Summe:
$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}.$$
   Die *Charakteristik* von $\mathbb{K}$ ist die kleinste natürliche Zahl n, für die $n1 = 0$ ist. Wenn $n1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, sagt man, dass $\mathbb{K}$ Charakteristik 0 hat.
   (i) Zeigen Sie, dass $(r1)(s1) = (rs)1$ für alle $r, s \in \mathbb{N}$.
   (ii) Sei $[1] \in \mathbb{Z}_3$. Bestimmen Sie $n[1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Charakteristik von $\mathbb{Z}_3$.
   (iii) Bestimmen Sie die Charakteristik von $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
   (iv) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik $n \neq 0$. Zeigen Sie, dass n eine Primzahl ist.

3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen V Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ sind.
   (i) Sei $V = \mathbb{C}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mit Addition in $\mathbb{C}$ als Vektoraddition und Skalarmultiplikation gegeben durch Einschränkung der Multiplikation in $\mathbb{C}$.
   (ii) Sei $V = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mit Addition in $\mathbb{Q}$ als Vektoraddition und Skalarmultiplikation gegeben durch Einschränkung der Multiplikation in $\mathbb{R}$.
   (iii) $(*)$ Sei $V =]0, +\infty[$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mit Vektoraddition definiert als $x \boxplus y := xy$ und Skalarmultiplikation gegeben durch $\alpha \boxdot x := x^\alpha$.
   (iv) Sei $V = \{f \in \mathrm{Fun}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid f(0) = 1\}$, mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation definiert wie in $\mathrm{Fun}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

-bitte wenden-

4. Gegeben sind $V = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ und $W = \{(\alpha, -\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ als Teilmengen des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.
   (i) ($*$) Zeigen Sie, dass V und W Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind.
   (ii) ($*$) Sind die beiden Vektoren $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ Elemente von V? Skizzieren Sie die Mengen V und W im dreidimensionalen Raum.
   (iii) ($*$) Bestimmen Sie die Menge $V \cap W$. Ist $V \cap W$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$? Entscheiden Sie auch, ob $V \cup W$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
   (iv) ($*$) Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ und U_γ die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = \gamma\}$. Zeigen Sie, dass U_γ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist genau dann, wenn $\gamma = 0$.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem ($*$) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 05./06.12.2017. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718