Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Freitag, 17.11.2017
Aufgabenblatt 5

**Aufgaben zur Vorlesung:**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1**

1. Wir definieren $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ und $[0, 2\pi[ := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\pi\}$.
   (i) $(*)$ Sei $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha \in [0, 2\pi[$. Zeigen Sie, dass dann $z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   (ii) Sei $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und sei $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ mit $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$. Zeigen Sie, dass $|z\overline{w}| = \mathrm{Re}(z\overline{w})$ genau dann, wenn $\alpha = \beta$.
   (iii) $(*)$ Sei $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ und sei $w = s(\cos\beta + i\sin\beta)$ mit $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\alpha, \beta \in [0, 2\pi[$. Zeigen Sie, dass $|z + w| = |z| + |w|$ genau dann, wenn $\alpha = \beta$.
   (iv) Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein Polynom mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(x)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von $p(x)$ ist.

2. Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahl $(1 + i)^5$
   (i) mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes;
   (ii) indem Sie die Zahl $1 + i$ in Polarkoordinaten schreiben.
   Welche dieser beiden Methoden eignet sich besser, um den Realteil und den Imaginärteil der komplexen Zahl $(1 - i)^{17}$ zu bestimmen?

3. Gegeben sind die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und die Funktion $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g(a, b) := a + bi$. Wir definieren die folgenden Operationen auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(a, b) \boxplus (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \boxdot (c, d) = (ac, bd)$.
   (i) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \boxplus, \boxdot)$ ein kommutativer Ring ist. Bestimmen Sie das neutrale Element der Addition und das neutrale Element der Multiplikation. Ist $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \boxplus, \boxdot)$ ein Körper?
   (ii) Seien $u, v$ beliebige Elemente von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $g(u \boxplus v) = g(u) + g(v)$. Gilt auch $g(u \boxdot v) = g(u)g(v)$?

4. Wir betrachten die Teilmenge $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
   (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ bezüglich der gewöhnlichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ einen kommutativen Ring bildet. Ist $\mathbb{Z}[i]$ ein Körper?
   (ii) $(*)$ Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{Z}[i] \mid |z| \leq 3\}$ in der komplexen Zahlenebene und finden Sie alle Elemente in $\mathbb{Z}[i]^\times := \{z \in \mathbb{Z}[i] \mid \exists w \in \mathbb{Z}[i] : zw = wz = 1\}$.
   (iii) $(*)$ Eine Zahl $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus (\mathbb{Z}[i]^\times \cup \{0\})$ heißt *irreduzibel*, falls für alle $v, w \in \mathbb{Z}[i]$ gilt: Ist $z = vw$, dann ist $v$ oder $w$ ein Element von $\mathbb{Z}[i]^\times$. Zeigen Sie, dass $z \in \mathbb{Z}[i]$ irreduzibel ist, wenn $|z|^2 = p$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? Begründen Sie Ihre Antwort.
   (iv) $(*)$ Bestimmen Sie alle irreduziblen Zahlen $z \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z| \leq 3$.

*Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 28./29.11.2017. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:*
*www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718*