Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 15.11.2017
Aufgabenblatt 4

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

1. Sei $P(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Aussagenform mit den folgenden Eigenschaften:
   - $P(1)$ ist wahr.
   - Sei k eine beliebige natürliche Zahl: Wenn die Aussagen $P(1), \dots, P(k)$ wahr sind, dann ist auch die Aussage $P(k+1)$ wahr.

   Die Aussagenform $Q(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ sei definiert durch $P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)$. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass $Q(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie im Anschluss, dass auch $P(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Eine natürliche Zahl $p \geq 2$ heißt *Primzahl*, falls sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Eine natürliche Zahl n hat eine *Primfaktorzerlegung*, wenn $n = p_1 \cdots p_l$ für $l \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \dots, p_l$. Zeigen Sie, dass jedes $n \geq 2$ eine Primfaktorzerlegung hat.

3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Gegeben ist die Gleichung $G_{m,n}$ von der Form $x_1 + \cdots + x_m = n$ für $x_i \in \mathbb{N}_0$. Sei $l_{m,n}$ die Anzahl der Lösungen von $G_{m,n}$.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass $l_{m,1} = m$ und $l_{1,n} = 1$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.
   (ii) $(*)$ Nehmen Sie an, dass
   $$l_{m,n+1} = \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} \text{ und } l_{m+1,n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$
   für fest gewählte $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $l_{m+1,n+1} = \dfrac{(n+m+1)!}{(n+1)!m!}$.
   (iii) $(*)$ Kann man aus den Teilen (i) und (ii) folgern, dass
   $$l_{m,n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$$
   für alle $m, n \in \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (i) $z\overline{z} = |z|^2$
   (ii) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z \leq 2|\operatorname{Re} z| \leq 2|z|$
   (iii) $|zw| = |z| \cdot |w|$ $(*)$
   (iv) $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$ $(*)$

   Zeigen Sie zudem, dass $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \; \forall n \in \mathbb{N} \, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

5. Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Zahlenebene:
   (i) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$
   (ii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| = |z + 1|\}$
   (iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 3| = 2|z + 3|\}$

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 21./22.11.2017. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718