Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Wintersemester 2017/18
Mittwoch, 08.11.2017
Aufgabenblatt 3

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

1. Gegeben ist eine Funktion $f\colon M \longrightarrow N$ sowie die beiden Teilmengen $M_1, M_2 \subset M$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) $M = f^{-1}(f(M))$
   (ii) $N = f(f^{-1}(N))$
   (iii) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$
   (iv) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$

2. Sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen und $f\colon M \longrightarrow M$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
   (a) f ist injektiv;
   (b) f ist surjektiv;
   (c) f ist bijektiv.
   Sind diese Aussagen auch äquivalent für $M = \mathbb{N}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls es eine bijektive Funktion $M \longrightarrow N$ mit $N \subseteq \mathbb{N}$ gibt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) M ist abzählbar genau dann, wenn es eine surjektive Funktion $\mathbb{N} \longrightarrow M$ gibt.($*$)
   (ii) Die Menge $\mathrm{Fun}(\{A, B\}, \mathbb{N})$ aller Funktionen von $\{A, B\}$ nach $\mathbb{N}$ ist abzählbar.($*$)
   (iii) Die Menge $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \{A, B\})$ aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{A, B\}$ ist abzählbar.

4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
   (i) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ ($*$)
   (ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ ($*$)
   (iii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$ ($*$)
   (iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$
   (v) $n! \leq n^{n-1}$
   (vi) 6 teilt $n^3 + 5n$

5. Die Fibonaccizahlen sind induktiv definiert als $F_1 := 1, F_2 := 1$ und $F_{n+2} := F_n + F_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$.
   (i) $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$
   (ii) $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
   (iii) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem ($*$) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 14./15.11.2017. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:
www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-WS1718