Version A

Schriftliche Aufgaben (30 Punkte)
Hier sind Begründungen verlangt.

7. *(5 Punkte)* Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, -1, 1)$ und $v_2 = (0, 2, -2)$ im $\mathbb{Q}^3$.
   (a) Ergänzen Sie die Menge $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{Q}^3$, indem Sie einen Vektor der Standardbasis hinzufügen. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basis des $\mathbb{Q}^3$ ist.
   (b) Schreiben Sie den Vektor $(1, 0, 1) \in \mathbb{Q}^3$ als Linearkombination der Vektoren in $\mathcal{B}$.

8. *(5 Punkte)* Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ein Unterraum des $\mathbb{K}$-Vektorraumes $\mathbb{K}^2$ ist genau dann, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$.

9. *(5 Punkte)* Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Seien $v \in V$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, f(v), \ldots, f^n(v)$ linear unabhängig sind.

10. *(8 Punkte)* Sei $\mathcal{E}_k$ die Standardbasis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^k$ mit Vektoren $e_1, \ldots, e_k$. Wir betrachten die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ gegeben durch
$$f(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} z_1 + z_3 + z_4 \\ 2(z_1 + z_2 + z_4) \\ 3(z_1 + z_2 + z_3) \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{E}_4$ und $\mathcal{B}$, wobei die Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^3$ die Vektoren $b_1 := ie_1, b_2 := ie_2, b_3 := ie_3$ enthält.
   (b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^3}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, wobei die Basis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{C}^3$ die Vektoren $c_1 := e_3, c_2 := e_2, c_3 := e_1$ enthält.
   (c) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen $\mathcal{E}_4$ und $\mathcal{C}$, und die Koordinaten von $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$.

11. *(7 Punkte)* Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$.
   (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ durch die Matrix A gegeben ist. Zeigen Sie, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.

-Bitte auf diesem Blatt keine Lösungen eintragen-