Modulprüfung zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Bearbeitungszeit: zwei Stunden

In allen Teilen der Klausur sind Begründungen verlangt. Dabei dürfen nur Definitionen, Aussagen und Methoden aus der Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie I aus dem WS 17/18 (Prof. König) zitiert und ohne weitere Erklärung genutzt werden. Andere Definitionen und Aussagen müssen gegebenenfalls eingeführt bzw. bewiesen werden.

Erster Teil (12 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Punkte gibt es für die korrekte Begründung.

1. *(3 Punkte)* Die Verknüpfung surjektiver Abbildungen ist surjektiv.
2. *(3 Punkte)* Eine Abbildung, die zugleich eine transitive Relation ist, ist injektiv.
3. *(3 Punkte)* Es gilt $\sum_{k=0}^{42} (-1)^k \binom{42}{k} = 0$.
4. *(3 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann gilt $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Zweiter Teil (38 Punkte)

5. *(4 Punkte)* Gegeben ist die komplexe Zahl
$$z = (2-3i)(3+2i) + \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}.$$
Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $z = a + bi$.

6. *(5 Punkte)* Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass
$$\forall\, n \in \mathbb{N} : A^n = 3^{n-1} \cdot A.$$

7. *(5 Punkte)* Gegeben sind sowohl die Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ mit den Vektoren $v_1 = (-1, 1, 2)^{\mathrm{t}}, v_2 = (1, 1, 3)^{\mathrm{t}}, v_3 = (1, 0, -1)^{\mathrm{t}}$ als auch die Vektoren $w_1 = (0, 2, 2)^{\mathrm{t}}$ und $w_2 = (3, 2, -1)^{\mathrm{t}}$. Bestimmen Sie eine weitere Basis $\mathcal{B}'$ des $\mathbb{R}^3$, indem Sie die beiden linear unabhängigen Vektoren w_1 und w_2 um einen Vektor aus $\mathcal{B}$ ergänzen.

8. *(5 Punkte)* Gegeben sind die Unterräume $S = \{(x, y, z)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ und $T_\alpha = [\{(1, \alpha, 2)^{\mathrm{t}}, (1, -2, -\alpha)^{\mathrm{t}}\}]$ von $\mathbb{R}^3$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $S \cap T_\alpha = [\{(0, 1, 1)^{\mathrm{t}}\}]$.

9. *(9 Punkte)* Gegeben ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q}).$$
   (a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und bestimmen Sie A^{-1}. Geben Sie die dazu notwendigen Rechenschritte an.
   (b) Sei $V = [\{1, x, x^2\}] \subset \mathbb{Q}[x]$ und $f : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung, die bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ von V durch die Matrix A beschrieben ist. Sei $g : V \longrightarrow V$ die lineare Abbildung mit $\sum_{k=0}^{2} \lambda_k x^k \mapsto \sum_{k=1}^{2} k\lambda_k x^{k-1}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung $g \circ f$ bezüglich $\mathcal{B}$.

10. *(10 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Nehmen Sie an, dass die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ eine Basis $\mathcal{B}_V$ von V bilden und die Vektoren $w_1, w_2 \in W$ eine Basis $\mathcal{B}_W$ von W. Sei $f : V \longrightarrow W$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, deren darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.
   (b) Geben Sie eine Basis $\mathcal{C}_V$ von V sowie eine Basis $\mathcal{C}_W$ von W an, sodass die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{C}_V$ und $\mathcal{C}_W$ in Gauß-Normalform ist.

Dritter Teil (30 Punkte)

In diesem Teil wird mit $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper bezeichnet.

11. *(6 Punkte)* Sei $U \neq \emptyset$ eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Wir definieren auf V eine Relation durch $v \sim w$, falls $v - w \in U$ für $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert, wenn U ein Unterraum von V ist. Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist U ein Unterraum, wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert?

12. *(6 Punkte)* Seien S, T und U Unterräume eines endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, sodass $S \cap T = S \cap U$, $S + T = S + U$ und $T \subseteq U$. Zeigen Sie, dass $T = U$. Gilt diese Aussage auch, wenn V ein nicht notwendigerweise endlich dimensionaler Vektorraum ist?

13. *(6 Punkte)* Gegeben sind die Unterräume $U_1 = \{(\lambda, ..., \lambda)^t \in \mathbb{R}^n | \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ und $U_2 = \{(\lambda_1, ..., \lambda_n)^t \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $U_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^n$.

14. *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass der Rang einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ gleich 1 ist genau dann, wenn es Vektoren $u, v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit $A = u \cdot v^{\mathrm{t}}$.

15. *(6 Punkte)* Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und sei $\phi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sei $U \subset V$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass $\phi^{-1}(\phi(U)) = U + \mathrm{Kern}(\phi)$. Gilt auch $\phi^{-1}(\phi(U)) = U \oplus \mathrm{Kern}(\phi)$?