Modulprüfung zur Vorlesung
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Erster Teil (12 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Wahl. Punkte gibt es für die korrekte Begründung.

1. *(3 Punkte)* Seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

2. *(3 Punkte)* Eine symmetrische Relation ist eine Funktion.

3. *(3 Punkte)* Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge. Dann existiert eine injektive Abbildung $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

4. *(3 Punkte)* Es gibt genau zwei komplexe Zahlen z mit $z^2 = i$.

Zweiter Teil (38 Punkte)

In diesem Teil sind ebenfalls Begründungen verlangt.

5. *(5 Punkte)* Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n \cdot (n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. *(5 Punkte)* Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1, 0, 2, 3)^t, v_2 = (2, 2, 4, 0)^t, v_3 = (-1, 1, 7, 2)^t$ und $v_4 = (4, 0, -1, 4)^t$ in $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes
$$U := [\{v_1, v_2, v_3, v_4\}] \subset \mathbb{R}^4.$$

7. *(10 Punkte)* Gegeben ist die Matrix $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2\lambda \\ 1 & 4 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$.
   (a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{Q}$, für die A_λ invertierbar ist.
   (b) Bestimmen Sie die Matrix A_0^{-1}.

8. *(8 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^2$ mit Vektoren $b_1 = (0, 1)^t$ und $b_2 = (1, 1)^t$ durch die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ gegeben ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix A von f bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und geben Sie jeweils eine Basis für $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ an.

– Bitte wenden –

9. *(5 Punkte)* Sei $A = \begin{pmatrix} 3i & 1+i \\ 9i & 3+3i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Bestimmen Sie zwei Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(2)$, sodass $S \cdot A \cdot T$ in Gauß-Normalform ist.

10. *(5 Punkte)* Sei $V \subset \mathbb{C}[x]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei $f : V \longrightarrow V$ die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung definiert durch
$$\sum_{i=0}^{2} \mu_i x^i \mapsto x \cdot (\mu_1 + 2\mu_2 x) + \sum_{i=0}^{2} \mu_i x^i.$$
Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ von V mit Vektoren $b_1 = 1, b_2 = x$ und $b_3 = x^2$ und zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Dritter Teil (30 Punkte)
Hier sind vollständige Begründungen verlangt. Mit $\mathbb{K}$ wird ein beliebiger Körper bezeichnet.

11. *(6 Punkte)* Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, v_2, \dots, v_n, x, y$ Vektoren in V mit $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Unterräume $U_1 := [\{v_1, v_2, \dots, v_n\}]$, $U_2 := [\{v_1, v_2, \dots, v_n, x\}]$ und $U_3 := [\{v_1, v_2, \dots, v_n, y\}]$. Sei zudem $y \notin U_1$ aber $y \in U_2$. Zeigen Sie, dass $x \in U_3$.

12. *(5 Punkte)* Sei $V = \mathbb{K}^n$ wobei $n \geq 2$ und seien U und W $\mathbb{K}$-Unterräume von V mit $\dim(U) = \dim(W) = n - 1$ und $U \neq W$. Zeigen Sie, dass $\dim(U \cap W) = n - 2$.

13. *(8 Punkte)* Seien $v_1, v_2, \dots, v_r \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängige Vektoren für $r \leq n$ in $\mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$.
    (a) Zeigen Sie, dass $Av_1, Av_2, \dots, Av_r \in \mathbb{K}^m$ linear unabhängige Vektoren sind.
    (b) Finden Sie linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$ mit $A \neq 0$, sodass die Vektoren Av_1 und Av_2 linear abhängig sind.

14. *(11 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sei $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ mit $\phi^2 = \mathrm{id}_V$.
    (a) Sei $v \in V$ mit $v \neq 0$ ein Vektor mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $\phi(v) = \lambda v$. Zeigen Sie, dass λ entweder gleich 1 oder gleich -1 ist.
    (b) Wir betrachten die beiden Unterräume $U := \{u \in V \mid \phi(u) = u\}$ und $W := \{w \in V \mid \phi(w) = -w\}$ von V. Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$.
    (c) Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass die darstellende Matrix von ϕ bezüglich $\mathcal{B}$ die Form
    $$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & -E_{n-r} \end{pmatrix}$$
    mit $1 \leq r \leq n$ hat.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!