Darstellungstheorie und Homologische Algebra

Vorlesungsmitschrieb zur Vorlesung bei Prof. Dr. Steffen Koenig
Universität Stuttgart, WiSe 16/17

Maximilian Hofmann

10. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Algebren, Darstellungen, Moduln

Es sei k ein Körper. Alle betrachteten Ringe sind assoziativ und besitzen ein Einselement, welches unter Ringhomomorphismen erhalten bleibt. 17.10.2016

1.1 Definition Ein Ring A heißt *k-Algebra*, falls A ein Vektorraum über k ist und

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad \text{für alle } a, b \in A \text{ und } \lambda \in k.$$

Für einen Ring A sei $\mathrm{Z}(A) = \{a \in A : ab = ba \text{ für alle } b \in A\}$ das Zentrum von A.

1.2 Lemma *Für einen Ring A sind äquivalent.*

(a) *Es ist A eine k-Algebra.*

(b) *Es gibt einen Ringhomomorphismus $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A)$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Ist A eine k-Algebra, so definiere $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A)$ durch $\alpha(\lambda) = \lambda \cdot 1_A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Wir müssen eine mit der Ringstruktur kompatible k-Vektorraumstrukture auf A definieren. Dazu definiere $\lambda \cdot a := \alpha(\lambda)a$ für $\lambda \in k$ und $a \in A$. Dann ist $\lambda(ab) = \alpha(\lambda)ab = (\lambda a)b$ und $\lambda(ab) = \alpha(\lambda)ab = a\alpha(\lambda)b = a(\lambda b)$ für $a, b \in A$ und $\lambda \in k$, da $\mathrm{Im}(\alpha) \subseteq \mathrm{Z}(A)$. $\square$

Beispiele

- Es ist $A = k$ mit $\mathrm{id}\colon k \to \mathrm{Z}(A) = k$ eine k-Algebra.
- Für $n \geq 1$ ist $A = \mathrm{M}_n(k)$ mit

$$\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A),\ \lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_n$$

  eine k-Algebra mit $\dim_k(A) = n^2$. Beachte, dass wegen $\mathrm{Z}(A) = \{\lambda I_n : \lambda \in k\}$ die k-Algebrastruktur auf A eindeutig bestimmt ist.
- Der Polynomring $A = k[x]$ wird durch $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A) = k[x],\ \lambda \mapsto \lambda$ zu einer k-Algebra.

  Sei $f(x) \in A$ mit $\deg(f) \geq 1$. Für $\lambda \in k$ ist dann $\lambda + (f(x)) =: \bar{\lambda} \neq 0$, also wird auch $A/(f(x))$ zu einer k-Algebra durch $\bar{\alpha}\colon k \to A/(f(x)),\ \lambda \mapsto \bar{\lambda}$.

  Auf diese Weise erhalten wir beispielsweise die $\mathbf{Q}$-Algebra $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \mathbf{Q}[x]/(x^2 - 2)$.
- Für $n \geq 1$ erhalten wir die Algebra der oberen Dreiecksmatrizen über k

$$A = \begin{pmatrix} k & \cdots & k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{M}_n(k)$$

  durch $\alpha\colon k \mapsto \mathrm{Z}(A), \lambda \mapsto \lambda I_n$.
- Sei G eine multiplikative geschriebene Gruppe. Sei V der k-Vektorraum mit Basis G. Dann ist für $v, w \in V$

$$v = \sum_{g \in G} \lambda_g g \ \text{ fast alle } \lambda_g = 0 \qquad \text{und} \qquad w = \sum_{h \in G} \mu_h h \ \text{ fast alle } \mu_h = 0.$$

Definiere eine Multiplikation auf V durch

$$v \cdot w := \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in H} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (\lambda_g \mu_h)(gh) = \sum_{j\in G} \left(\sum_{j=gh} \lambda_g \mu_h\right) j.$$

Dann ist V eine k-Algebra. Das Einselement ist gegeben durch das neutrale Element $e \in G$, denn es ist

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right) e = \sum_{g\in G} \lambda_g (ge) = \sum_{g\in G} \lambda_g g = \sum_{g\in G} \lambda_g (eg) = e \left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right).$$

Wir schreiben $kG := V$.

1.3 Definition Die *Gruppenalgebra* kG einer Gruppe G über dem Körper k ist ein k-Vektorraum mit Basis $\{g : g \in G\}$, die Multiplikation ist die lineare Fortsetzung der Gruppenmultiplikation.

Ein *Köcher* $Q = (Q_0, Q_1)$ ist ein gerichteter Graph mit einer Menge von Punkten Q_0 und gerichteten Kanten Q_1, d.h. es gibt Abbildungen $s, t \colon Q_1 \to Q_0$ und wir sagen eine Kante $\alpha \in Q_1$ geht von $s(\alpha) \in Q_0$ (***s**ource*) nach $t(\alpha) \in Q_0$ (***t**arget*).

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

Ein *Weg* in Q der Länge $n \geq 1$ ist eine sinnvolle Folge von Pfeilen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, d.h. $\alpha_i \in Q_1$ mit $t(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, $t(\alpha_2) = s(\alpha_3), \ldots$.

Im Folgenden sei Q ein Köcher mit $|Q_0| < \infty$, wobei wir häufig auch $|Q_1| < \infty$ voraussetzen werden.

1.4 Definition Die *Wegealgebra* kQ hat als k-Basis alle Wege der Länge $n \geq 1$ in Q und für jeden Punkt $i \in Q_0$ einen sogenannten *faulen Weg* e_i der Länge 0. Die Multiplikation ist die k-lineare Fortsetzung der Hintereinanderausführung von Wegen, d.h.

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_m) = \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) & t(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & t(\alpha_n) \neq s(\beta_1). \end{cases}$$

Beachte dass hierbei für faule Wege $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)e_i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ falls $t(\alpha_n) = i$ und 0 sonst, analog ist $e_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ falls $s(\alpha_1) = i$ und 0 sonst.

Das Einselement in kQ ist gegeben durch $\sum_{i\in Q_0} e_i$ (hier ist $|Q_0| < \infty$ notwendig), denn für $j \in Q_0$ und $\alpha \in Q_1$ ist

$$\left(\sum_{i\in Q_0} e_i\right) e_j = \sum_{i\in Q_0} e_i e_j = e_j e_j = e_j$$

$$\left(\sum_{i\in Q_0} e_i\right) \alpha = \left(\sum_{i\in Q_0} e_i\right) e_{s(\alpha)} \alpha = \sum_{i\in Q_0} e_i e_{s(\alpha)} \alpha = e_{s(\alpha)} e_{s(\alpha)} \alpha = \alpha.$$

Für Multiplikation von rechts ist die Rechnung analog.

Beispiel Sei Q der Köcher mit 4 Punkten und 3 Kanten gegeben durch

$$\begin{tikzcd} & & 3 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & 4. \end{tikzcd}$$

Dann ist eine k-Basis von kQ gegeben durch $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \alpha\beta, \alpha\gamma\}$, also $\dim_k(kQ) = 9$.

1.5 Definition Ein *Homomorphismus von k-Algebren* ist ein Ringmorphismus $\varphi\colon A \to B$, der auch k-linear ist. Es heißt φ *Isomorphismus von k-Algebren*, falls φ zusätzlich bijektiv ist. 19.10.2016

Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Isomorphismus von k-Algebren, so auch sein Inverses $\varphi^{-1}\colon B \to A$.

Beispiele

- Für jede k-Algebra A ist $\alpha\colon k \to \mathrm{Z}(A),\ \lambda \mapsto \lambda \cdot 1_A$ ein Homomorphismus von k-Algebren.
- Sei $G := \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{e, g\}$ die zyklische Gruppe von Ordnung 2, d.h. e ist das Einselement und $g^2 = e$. Sei $A := kG$ die Gruppenalgebra, d.h. A hat $\{e, g\}$ als k-Basis, $\dim_k(A) = 2 = |G|$.

  Sei $B := k \oplus k$ die k-Algebra gegeben durch die direkte Summe als k-Vektorräume, wobei die Multiplikation komponentenweise definiert ist.

  Definiere die lineare Abbildung

  $$\begin{aligned} \varphi\colon A &\longrightarrow B \\ e &\longmapsto (1,1) \\ g &\longmapsto (1,-1). \end{aligned}$$

  Für $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in k$ ist

  $$\begin{aligned} \varphi((\lambda e + \mu g)(\lambda' e + \mu' g)) &= \varphi((\lambda\lambda' + \mu\mu')e + (\lambda\mu' + \mu\lambda')g) \\ &= (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \lambda\mu' + \mu\lambda', \lambda\lambda' + \mu\mu' - \lambda\mu' - \mu\lambda') \\ &= (\lambda + \mu, \lambda - \mu)(\lambda' + \mu', \lambda' - \mu') \\ &= \varphi(\lambda e + \mu g)\varphi(\lambda' + \mu' g). \end{aligned}$$

  Somit ist φ ein k-Algebrenhomomorphismus.

  Es sind $(1,1)$ und $(1,-1)$ in B genau dann linear unabhängig, wenn $1 \neq -1$, d.h. genau dann, wenn $\mathrm{char}(k) \neq 2$. In diesem Fall ist also $\varphi\colon kG \to k \oplus k$ ein Algebrenisomorphismus.

  Es bleibt der Fall $\mathrm{char}(k) = 2$. Betrachte das Element $u := e + g \in A$. Dann ist auch $\{e, u\}$ eine k-Basis von A.

  Es wird $eu = e(e+g) = e^2 + eg = e + g = u$ und $gu = g(e+g) = ge + g^2 = g + e = u$. Zudem ist $u^2 = (e+g)^2 = e^2 + 2eg + g^2 = 2 + 2g = 0$, allerdings $u \neq 0$.

  Für ein Element $0 \neq (\lambda, \mu) \in k \oplus k$ gilt aber stets $(\lambda, \mu)^2 = (\lambda^2, \mu^2) \neq 0$, also folgt $A \not\simeq k \oplus k$.

  Sei $C := k[x]/(x^2)$. Dann sind A und C kommutative k-Algebren der Dimension 2.

  Definiere die lineare Abbildung

  $$\begin{aligned} \psi\colon A &\longrightarrow C \\ e &\longmapsto 1_C \\ u &\longmapsto x. \end{aligned}$$

  Für $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in k$ ist

  $$\begin{aligned} \psi((\lambda e + \mu u)(\lambda' e + \mu' u)) &= \psi(\lambda\lambda' e + (\lambda\mu' + \mu\lambda')u) \\ &= \lambda\lambda' 1_C + (\lambda\mu' + \mu\lambda')x \\ &= (\lambda 1_C + \mu x)(\lambda' 1_C + \mu' x) \\ &= \psi(\lambda e + \mu u)\psi(\lambda' e + \mu' u). \end{aligned}$$

  Somit ist ψ ein k-Algebrenhomomorphismus. Schließlich ist $\{1, x\}$ eine k-Basis, somit ist $\psi\colon kG \to k[x]/(x^2)$ sogar ein k-Algebrenisomorphismus.

  Zusammengefasst haben wir also gezeigt, dass für $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{e, g\}$ und einen Körper k

  $$kG \simeq \begin{cases} k \oplus k & \mathrm{char}(k) \neq 2 \\ k[x]/(x^2) & \mathrm{char}(k) = 2. \end{cases}$$

- Sei Q der Köcher mit 3 Punkten und 2 Kanten gegeben durch

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \right).$$

Dann hat die Wegealgebra kQ die k-Basis $\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$, also $\dim_k(kQ) = 6$.

Sei

$$B := \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

die k-Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen.

Definiere eine lineare Abbildung $\varphi\colon A = kQ \to B$ durch

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha\beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies definiert einen k-Algebrenisomorphismus $\varphi\colon kQ \to B$.

Allgemein betrachte für $n \geq 1$ den Köcher

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \cdots\cdots\to n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n \right).$$

Dann ist die Wegealgebra kQ isomorph zur k-Algebra der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen.

$$kQ \simeq \begin{pmatrix} k & \dots & k \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & k \end{pmatrix}_{n \times n}$$

1.6 Lemma *Sei A eine k-Algebra, $\dim_k(A) = n < \infty$. Dann existiert ein injektiver Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon A \to B = \mathrm{M}_n(k)$.*

Beweis. Sei $B = \mathrm{End}_k(A) \simeq \mathrm{M}_n(k)$. Für $a \in A$ definiere $\alpha_a\colon A \to A, b \mapsto ba$. Zu zeigen ist $\alpha_a \in B$, d.h. α_a ist k-linear. Dazu ist für $b, b_1, b_2 \in A$ und $\lambda \in k$

$$\alpha_a(b_1 + b_2) = (b_1 + b_2)a = b_1 a + b_2 a = \alpha_a(b_1) + \alpha_a(b_2)$$
$$\alpha_a(\lambda b) = (\lambda b)a = \lambda(ba) = \lambda\alpha_a(b).$$

Somit ist $\alpha_a \in B$ für $a \in A$. Nun zeige, dass $\varphi\colon A \to B,\ a \mapsto \alpha_a$ ein k-Algebrenhomomorphismus ist. Dazu ist für $a, a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in k$ für alle $b \in A$

$$\alpha_{a_1+a_2}(b) = b(a_1 + a_2) = ba_1 + ba_2 = \alpha_{a_1}(b) + \alpha_{a_2}(b)$$
$$\alpha_{\lambda a}(b) = b(\lambda a) = \lambda(ba) = \lambda\alpha_a(b)$$
$$\alpha_{a_1 a_2}(b) = b(a_1 a_2) = (ba_1)a_2 = (\alpha_{a_1}\alpha_{a_2})(b).$$

Beachte die Konvention zur Komposition in $\mathrm{End}_k(A)$. Somit ist φ ein k-Algebrenhomomorphismus. Für $a_1, a_2 \in A$ folgt aus $\alpha_{a_1} = \alpha_{a_2}$, dass $\alpha_{a_1}(1) = \alpha_{a_2}(1)$, also $a_1 = 1 \cdot a_1 = 1 \cdot a_2 = a_2$. Also ist φ injektiv. $\square$

1.7 Definition Sei A eine k-Algebra und V ein k-Vektorraum mit $B = \mathrm{End}_k(V)$. Eine *Darstellung* von A auf V ist ein Homomorphismus von k-Algebren $\varphi\colon A \to B$. Die Darstellung heißt *treu*, falls φ injektiv ist. 21.10.2016

Nach Lemma 1.6 hat jede endlichdimensionale k-Algebra A eine treue Darstellung auf $V = A$, gegeben durch $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(A),\ a \mapsto (b \mapsto ba)$. Diese Darstellung heißt die *reguläre* Darstellung von A.

1.8 Definition Seien $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Ein *Homomorphismus von Darstellungen* ist eine k-lineare Abbildung $f\colon V \to W$, sodass für alle $v \in V$ und $a \in A$ stets $f(\varphi(a)(v)) = \psi(a)(f(v))$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert für alle $a \in A$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi(a)"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[d, "f"] \\ W \arrow[r, "\psi(a)"] & W \end{tikzcd}$$

Der Homomorphismus heißt *Isomorphismus von Darstellungen*, falls f ein Vektorraumisomorphismus ist. In diesem Fall ist auch $f^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus von Darstellungen.

Beispiel Sei $A = k$ und $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A, d.h. V ist ein k-Vektorraum. Da φ ein k-Algebrenhomomorphismus ist, gilt

$$\varphi(1_A) = \mathrm{id}_V \qquad \varphi(\lambda 1_A) = \lambda\varphi(1_A) = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$$

für $\lambda \in k$. Doch dies ist gerade die k-Vektorraumstruktur auf V. Somit ist ein Isomorphismus von Darstellungen von k gerade ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.

Ist $\dim_k(V) = n$, d.h. $V \simeq k^n$, so ist eine Darstellung von k auf k^n gegeben durch

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die darstellende Matrix ist in Blockdiagonalform mit Blöcken der Größe 1×1.

1.9 Definition Seien $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Dann ist

$$\varphi \oplus \psi\colon A \to \mathrm{End}_k(V \oplus W),\ a \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \varphi(a) & 0 \\ \hline 0 & \psi(a) \end{array}\right)$$

die *direkte Summe* der Darstellungen V und W. Für $v \in V$, $w \in W$ und $a \in A$ gilt dann also $(\varphi \oplus \psi)(v, w) = (\varphi(v), \psi(w))$.

Eine Darstellung heißt *zerlegbar*, wenn sie isomorph zu einer direkten Summe von Darstellungen ungleich 0 ist. Sonst heißt sie *unzerlegbar*.

- Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass nicht alle Darstellungen direkte Summen von eindimensionalen Darstellungen sind (nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar).
- Es gibt Algebren, die keine eindimensionalen Darstellungen besitzen. Betrachte dazu $A = \mathrm{M}_n(k)$ und eine Darstellung $\varphi\colon A \to B = \mathrm{End}_k(V)$. Dann ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ein zweiseitiges Ideal in A.

  Proposition *Es ist $A = \mathrm{M}_n(k)$ eine einfache Algebra, d.h. A hat außer* 0 *und A keine zweiseitigen Ideale.*

  Beweis. Sei $I \trianglelefteq A$ mit $I \neq 0$. Wir zeigen $I = A$. Dazu sei $M = (m_{ij})_{ij} \neq 0$ mit $M \in I$. Dann gibt es (i, j) mit $m_{ij} \neq 0$. Es sei E_{pq} die Matrix mit 1 an der Stelle (p, q) und 0 sonst. Dann ist $E_{ii} M E_{jj} = m_{ij} E_{ij} \in I$, also auch $E_{ij} \in I$. Zudem ist für $k, \ell = 1, \ldots, n$ nun $E_{ki} E_{ij} E_{j\ell} = E_{k\ell} \in I$, d.h. I enthält eine k-Basis von A, also $I = A$. □

Damit muss eine Darstellung $\varphi\colon A = \mathrm{M}_n(k) \to B = \mathrm{End}_k(V)$ entweder 0 (d.h. $V = 0$) sein oder injektiv (also treu) sein, was jedoch $n^2 = \dim_k(A) \leq \dim_k(B) = (\dim_k(V))^2$ impliziert. Doch dann kann $\mathrm{M}_n(k)$ für $n > 1$ keine eindimensionalen Darstellungen besitzen.

Allgemein folgt aus der Existenz eines k-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_\ell(k)$ aus $\varphi \neq 0$ also stets $l \geq n$. Wir erhalten die kleinstmögliche Darstellung ungleich 0 durch $\mathrm{id}\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$. Diese heißt die *natürliche Darstellung* von $\mathrm{M}_n(k)$.

1.10 Proposition *Sei A eine k-Algebra. Sei $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ eine Zerlegung von 1_A als Summe von paarweise orthogonalen Idempotenten, d.h. $e_i^2 = e_i$ und $e_ie_j = 0$ für $i \neq j$.*

Dann ist für jedes $i = 1, \ldots, n$ eine Darstellung gegeben durch

$$\varphi_i\colon A \to \mathrm{End}_k(e_iA) = \{e_ia : a \in A\},\;\; a \mapsto (\varphi_i(a)\colon e_ib \mapsto e_iba)$$

und die direkte Summe $\varphi = \varphi_1 \oplus \ldots \oplus \varphi_n$ ist die reguläre Darstellung von A.

Beispiele

- Für $A = \mathrm{M}_n(k)$ ist eine Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente gegeben durch

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}}_{=:\,e_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}}_{=:\,e_2} + \ldots + \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}}_{=:\,e_n}.$$

Dann ist

$$e_1A = \begin{pmatrix}*&\cdots&\cdots&*\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix},\; e_2A = \begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\*&\cdots&\cdots&*\\0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad e_nA = \begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0\\*&\cdots&\cdots&*\end{pmatrix},$$

d.h. e_iA ist die i-te Zeile in A, somit ist als Vektorräume $e_iA \simeq k^n$. Die Darstellung φ_i aus Proposition 1.10 wirkt auf den Zeilenvektor durch Multiplikation mit einer Matrix von rechts, d.h. φ_i ist isomorph zur natürlichen Darstellung von $\mathrm{M}_n(k)$.

Aus Proposition 1.10 folgt somit, dass für $A = \mathrm{M}_n(k)$ die reguläre Darstellung eine direkte Summe von n natürlichen Darstellungen ist.

- Sei Q ein Köcher und betrachte die Wegealgebra $A = kQ$. Dann ist $1_A = \sum_{i \in Q_0} e_i$ eine Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente. Es ist

$$e_iA = \{\text{Linearkombinationen von Wegen, die bei } i \in Q_0 \text{ starten}\}.$$

Sei nun Q der Köcher mit 4 Punkten und 3 Kanten gegeben durch

$$\begin{tikzcd} & & 3 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & 4. \end{tikzcd}$$

Dann ist

$$e_1A = \langle e_1, \alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma\rangle, \quad e_2A = \langle e_2, \beta, \gamma\rangle, \quad e_3A = \langle e_3\rangle, \quad e_4A = \langle e_4\rangle.$$

Beweis von 1.10. Seien $a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in k$. Dann zeigt

$$e_i a_1 + e_i a_2 = e_i(a_1 + a_2) \quad \text{und} \qquad \lambda e_i a_1 = e_i(\lambda a_1),$$

dass $e_i A$ ein Untervektorraum von A ist. Somit ist $\varphi_i(a) \in \operatorname{End}_k(e_i A)$ als Einschränkung der regulären Darstellung. Wir zeigen, dass $A = \bigoplus_{i=1}^n e_i A$. Sei $a \in A$. Dann ist

$$a = 1_A \cdot a = (e_1 + \ldots + e_n)a = e_1 a + \ldots + e_n a \in \sum_{i=1}^n e_i A.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Summe direkt ist, also dass $e_j A \cap \left(\sum_{i=1, i\neq j}^n e_i A\right) = \{0\}$ für $j = 1, \ldots, n$. Sei also $e_j a = \sum_{i=1, i\neq j}^n e_i a$ für ein $a \in A$. Dann ist

$$e_j a = e_j(e_j a) = e_j \left(\sum_{i=1, i\neq j}^n e_i a \right) = \sum_{i=1, i\neq j}^n e_i e_j a = 0.$$

Also ist $A = \bigoplus_{i=1}^n e_i A$. Nun gilt für die reguläre Darstellung

$$\varphi(a)\colon e_1 b + \ldots + e_n b = b \mapsto ba = e_1 ba + \ldots + e_n ba = \varphi_1(a)(e_1 b) + \ldots + \varphi_n(a)(e_n b).$$

Somit besitzt die darstellende Matrix von $\varphi(a)$ Blockdiagonalgestalt, also $\varphi = \bigoplus_{i=1}^n \varphi_i$. ☐

1.11 Definition Sei A eine k-Algebra. Ein A-*Linksmodul* M (Bezeichnung ${}_AM$) ist ein k-Vektorraum mit einer Abbildung $A \times M \to M,\ (a, m) \mapsto am$ (Linksoperation von A auf M), sodass für all $a, b \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ und $\lambda \in k$ gilt 24.10.2016

(1L) $1_A \cdot m = m$

(2L) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$

(3L) $(a + b)m = am + bm$

(4L) $(ab)m = a(bm)$

(5L) $(a\lambda)m = \lambda(am) = a(\lambda m)$

Analog ist ein A-*Rechtsmodul* M (Bezeichnung M_A) ein k-Vektorraum mit einer Abbildung $M \times A \to M,\ (m, a) \mapsto ma$ (Rechtsoperation von A auf M). Es gelten analoge Axiome (1R-5R) für Rechtsmoduln, insbesondere für (4R) erhalten wir jedoch

$$\begin{aligned} \text{Linksmodul: } (ab)m &= a(bm) \quad \text{d.h. erst } b\text{, dann } a. \\ \text{Rechtsmodul: } m(ab) &= (ma)b \quad \text{d.h. erst } a\text{, dann } b. \end{aligned}$$

Die restlichen Axiome sind inhaltlich identisch.

Wir schreiben $M \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ falls M ein A-Linksmodul ist, analog $M \in \mathtt{Mod}\text{-}A$ falls M ein A-Rechtsmodul ist. Ist M ein (über k) endlichdimensionaler A-Linksmodul, so schreibe $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$, analog schreiben wir $M \in \mathtt{mod}\text{-}A$, falls M ein endlichdimensionaler A-Rechtsmodul ist.

Sei A eine k-Algebra. Die *entgegengesetzte Algebra* A^{op} ist als k-Vektorraum gleich A, jedoch mit Multiplikation $a \underset{A^{\mathrm{op}}}{\cdot} b = b \underset{A}{\cdot} a$. Es ist A^{op} eine k-Algebra. Ist A kommutativ, so gilt $A^{\mathrm{op}} = A$. Schließlich sind A^{op}-Linksmodul gleich A-Rechtsmoduln, also $A^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{Mod} = \mathtt{Mod}\text{-}A$.

1.12 Proposition *Es bezeichne $D = \operatorname{Hom}_k(-, k)$ die k-Dualität. Sei $M \in A\text{-}\mathtt{Mod}$. Dann ist $D(M) \in \mathtt{Mod}\text{-}A$ mit $fa\colon M \to k,\ m \mapsto f(am)$ für $f \in D(M)$, $a \in A$ und $m \in M$.*

Beweis. Wir weisen Axiom (4R) für $D(M)$ nach. Dazu seien $f \in D(M)$, $a, b \in A$ und $m \in M$. Dann ist

$$(fa)b\colon m \mapsto (fa)(bm) = f(a(bm)) \qquad \text{bzw.} \qquad f(ab)\colon m \mapsto f((ab)m).$$

Wegen $M \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ ist $a(bm) = (ab)m$, also folgt $(fa)b = f(ab)$, d.h. $D(M) \in \mathtt{Mod}\text{-}A$. ☐

1.13 Definition Sei A eine k-Algebra und seien X, Y zwei A-Linksmoduln. Eine k-lineare Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Homomorphismus von A-Linksmoduln* falls $f(ax) = af(x)$ für alle $a \in A$ und $x \in X$. Bezeichnung: $f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ bzw. $f \in \mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$.

Ein Homomorphismus von Moduln f heißt *Modulisomorphismus*, falls f bijektiv ist. Dann ist auch f^{-1} ein Modulisomorphismus.

Es ist $\mathrm{Hom}_k(X, Y)$ gerade der k-Vektorraum der k-linearen Abbildungen von X nach Y.

1.14 Lemma *Seien $X, Y \in A$-$\mathtt{mod}$. Dann ist $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY) \simeq \mathrm{Hom}_A((DY)_A, (DX)_A)$ als k-Vektorräume.*

Beweis. Sei $f \in \mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Sei $f^* = Df\colon DY \to DX$ die duale Abbildung gegeben durch $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ für $\varphi \in DY$. Wir zeigen: f^* ist ein Rechtsmodulhomomorphismus. Dazu ist für $\varphi \in DY$, $x \in X$ und $a \in A$

$$\begin{aligned} f^*(\varphi a)(x) &= ((\varphi a) \circ f)(x) = (\varphi a)(f(x)) = \varphi(a(f(x))) \\ (f^*(\varphi)a)(x) &= ((\varphi \circ f)a)(x) = (\varphi \circ f)(ax) = \varphi(f(ax)). \end{aligned}$$

Da f ein Homomorphismus von A-Linksmoduln ist, gilt $a(f(x)) = f(ax)$ und $f^*\colon DY \to DX$ ist ein Homomorphismus von A-Rechtsmoduln. Nach Voraussetzung sind die Moduln X und Y endlichdimensional über k, somit ist die Abbildung $f \mapsto f^*$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen (siehe lineare Algebra). $\square$

Beachte, dass beim Anwenden der Dualität sich die Kompositionsreihenfolge umkehrt.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} DZ \arrow[r, "g^*"] \arrow[rr, bend right, "(fg)^*=g^*f^*"'] & DY \arrow[r, "f^*"] & DX \end{tikzcd}$$

1.15 Theorem *Sei A eine k-Algebra.*

(a) *Sei $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A. Dann ist V ein A-Linksmodul durch $av := \varphi(a)(v)$ für $a \in A$ und $v \in V$.*

(b) *Sei M ein A-Linksmodul. Dann ist $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(M)$ mit $\varphi(a)\colon m \to am$ für $a \in A$ eine Darstellung von A.*

(c) *Seien $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Dann ist $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus von Darstellungen genau dann, wenn f Modulhomomorphismus ist.*

Beweis. (a): Ist φ eine Darstellung, so ist V ein k-Vektorraum. Wir prüfen die Modulaxiome (1L-5L). Seien $a, a_1, a_2 \in A$, $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in k$. Dann ist

$$\begin{aligned} 1_A v &= \varphi(1_A)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v, && \text{da } \varphi \text{ Alg.hom.} \\ a(v_1 + v_2) &= \varphi(a)(v_1 + v_2) = \varphi(a)(v_1) + \varphi(a)(v_2) = av_1 + av_2, && \text{da } \varphi \in \mathrm{End}_k(V) \\ (a_1 + a_2)v &= \varphi(a_1 + a_2)(v) = \varphi(a_1)(v) + \varphi(a_2)(v) = a_1 v + a_2 v, && \text{da } \varphi\text{Alg.hom.} \\ (a_1 a_2)v &= \varphi(a_1 a_2)(v) = \varphi(a_1)(\varphi(a_2)v) = a_1(a_2 v), && \text{da } \varphi\text{Alg.hom} \\ a(\lambda v) &= \varphi(a)(\lambda v) = \lambda\varphi(a)(v) = \lambda(av), && \text{da } \varphi \in \mathrm{End}_k(V) \end{aligned}$$

Damit ist V ein A-Linksmodul.

(b): Ist M ein A-Linksmodul, so ist M ein k-Vektorraum. Sei $a \in A$ und $\varphi(a)\colon m \mapsto am$. Zu zeigen ist: $\varphi(a)$ ist k-linear. Dazu seien $m, m_1, m_2 \in M$ und $\lambda \in k$. Mit (2L) und (5L) folgt

$$\begin{aligned} \varphi(a)(m_1 + m_2) &= a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2 = \varphi(a)(m_1) + \varphi(a)(m_2) \\ \varphi(a)(\lambda m) &= a(\lambda m) = \lambda(am) = \lambda\varphi(a)(m) \end{aligned}$$

Somit ist $\varphi(a)$ eine k-lineare Abbildung für alle $a \in A$. Nun zeige, dass $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ ein k-Algebrenhomomorphismus ist. Dazu nutzen wir (1L), (3L), (4L) und (5L) für $m \in M$, $a, a_1, a_2 \in A$ und $\lambda \in k$

$$\begin{aligned}
\varphi(1)(m) &= 1 \cdot m = m = \mathrm{id}_M(m) \\
\varphi(a_1 + a_2)(m) &= (a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m = \varphi(a_1)(m) + \varphi(a_2)(m) = (\varphi(a_1) + \varphi(a_2))(m) \\
\varphi(a_1 a_2)(m) &= (a_1 a_2)m = a_1(a_2 m) = \varphi(a_1)(\varphi(a_2)(m)) = (\varphi(a_1)\varphi(a_2))(m) \\
\varphi(\lambda a)(m) &= (\lambda a)m = \lambda(am) = \lambda\varphi(a)(m)
\end{aligned}$$

Damit ist $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ eine Darstellung von A.

(c): Sei $f\colon V \to W$ eine k-lineare Abbildung. Für alle $a \in A$ ist die Kommutativität der folgenden beiden Diagramme äquivalent.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi(a)"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r, "\psi(a)"] & W
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "v \mapsto av"] \arrow[d, "f"] & V \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r, "w \mapsto aw"] & W
\end{tikzcd}$$

Hom. von Darstellungen $\Leftrightarrow$ Hom. von Linksmoduln

Dies folgt aus (a) und (b), da $\varphi(a)(v) = av$ für $v \in V$, bzw. $\psi(a)(w) = aw$ für $w \in W$. $\square$

Durch die nun hergestellte Beziehung zwischen Darstellungen und Moduln lassen sich Begriffe vergleichen oder übertragen.

Beispiel Wir betrachten direkte Summen. Seien dazu $\varphi\colon A \to \mathrm{End}_k(V)$ und $\psi\colon A \to \mathrm{End}_k(W)$ Darstellungen von A. Nach Definition 1.9 ist die direkte Summe von φ und ψ gegeben durch

$$\varphi \oplus \psi\colon A \to \mathrm{End}_k(V \oplus W),\ a \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \varphi(a) & 0 \\ \hline 0 & \psi(a) \end{array}\right)$$

Nach Theorem 1.15 sind nun V und W auch A-Linksmoduln. Doch dann ist auch die direkte Vektorraumsumme $V \oplus W$ ein A-Linksmodul durch $a(v, w) := (av, aw)$ für $a \in A$, $v \in V$ und $w \in W$.

Daneben sind wegen $a(v, w) = (av, aw) = (\varphi(a)(v), \psi(a)(w)) = (\varphi \oplus \psi)(a)(v, w)$ die Begriffe der direkten Summe von Darstellungen und der direkten Summe von Linksmoduln äquivalent.

1.16 Definition Sei A eine k-Algebra und M ein A-Linksmodul. 26.10.2016

Ein Untervektorraum $U \subseteq M$ heißt *Untermodul* (oder Teilmodul) von M, falls $am \in M$ für alle $a \in A$ und $m \in M$.

Es heißt $0 \neq M$ *einfacher Modul*, falls 0 und M die einzigen Teilmoduln von M sind. Es heißt M *halbeinfach*, falls M eine endliche direkte Summe von einfachen Moduln ist.

Ist $U \subseteq M$ ein Untermodul von M, so ist auch der Quotientenvektorraum M/U ein A-Linksmodul, genannt der *Quotientenmodul*. Hier ist die Operation von A gegeben durch $a(m + U) := am + U$ für $a \in A$ und $m \in M$. Dies ist wohldefiniert, da für $m_1 + U = m_2 + U \in M/U$ gilt

$$am_1 + U = am_2 + U \Leftrightarrow am_1 - am_2 \in U \Leftrightarrow a(m_1 - m_2) \in U,$$

jedoch ist $a(m_1 - m_2) \in U$ da $U \subseteq M$ ein Teilmodul ist.

Beispiele
- Sei $A := kG$ für eine endliche Gruppe G. Dann ist $U = \{\lambda \sum_{g \in G} g : \lambda \in k\}$ ein eindimensionaler Untervektorraum von A.

Für $h \in G$ ist die Abbildung $h \cdot (-)\colon G \to G$ bijektiv, somit gilt für $h \in G$ und $\lambda \in k$

$$h\left(\lambda \sum_{g\in G} g\right) = \lambda \sum_{g\in G} hg = \lambda \sum_{g\in G} g,$$

Wegen $\dim_k(U) = 1$ ist U ein einfacher Untermodul von A.

- Sei $A = \mathrm{M}_n(k)$ für ein $n \geq 1$. Sei $\varphi\colon A = \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_\ell(k)$ eine Darstellung von A. Aus $\varphi \neq 0$ folgt dann $n \leq \ell$ nach einem früheren Beispiel.

  Ist daher M ein A-Linksmodul, so folgt aus $M \neq 0$ stets $\dim_k(M) \geq n$. Sei k^n der *natürliche* A-Linksmodul zur natürlichen Darstellung $\mathrm{id}\colon \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$. Da k^n minimale k-Dimension aller A-Linksmoduln ungleich 0 besitzt, ist k^n ein einfacher A-Linksmodul.

  Weiterhin erhalten wir aus der Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ mit $e_i = E_{ii}$, d.h. die Matrix, die 1 an der Stelle (i,i) und 0 überall sonst besitzt, folgende Zerlegung von A als A-Linksmodul

$$_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$$

  Es ist Ae_i ein n-dimensionaler A-Linksmodul für alle i, also einfach. Somit ist $_AA$ ein halbeinfacher Modul.

  Wir zeigen nun: $_AAe_1 \simeq {_AAe_2} \simeq \ldots \simeq {_AAe_n}$ als A-Linksmoduln.

  Wir konstruieren einen Isomorphismus von A-Linksmoduln $Ae_i = AE_{ii} \xrightarrow{f} AE_{jj} = Ae_j$ durch

$$f\colon AE_{ii} \to AE_{jj},\ aE_{ii} \mapsto aE_{ii}E_{ij} = aE_{ij} = aE_{ij}E_{jj} \in AE_{jj}$$

  Es ist f ein A-Linksmodulhomomorphismus, da für $a, b \in A$

$$af(bE_{ii}) = a(bE_{ii}E_{ij}) = (abE_{ii})E_{ij} = f(abE_{ii}).$$

  Ebenso betrachte den A-Linksmodulhomomorphismus

$$g\colon AE_{jj} \to AE_{ii},\ aE_{jj} \mapsto E_{jj}E_{ji} = aE_{ji} = aE_{ji}E_{ii} \in AE_{ii}.$$

  Dann ist für $a \in A$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(aE_{jj}) &= f(aE_{jj}E_{ji}) = aE_{jj}E_{ji}E_{ij} = aE_{jj}\\ (g \circ f)(aE_{ii}) &= g(aE_{ii}E_{ij}) = aE_{ii}E_{ij}E_{ji} = aE_{ii}\end{aligned}$$

  Somit ist f ein Isomorphismus von A-Linksmoduln mit Inversem g.

- Seien $_AX$ und $_AY$ zwei A-Linksmoduln und $f \in \mathrm{Hom}_A({_AX}, {_AY})$. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) \subseteq X$ ein Untermodul von X und $\mathrm{Im}(f)$ ein Untermodul von Y.

Für $X, Y \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ ist $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ ein k-Vektorraum, aber im Allgemeinen kein A-Modul. Wie kann man $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ zu einem Links- oder Rechtsmodul machen?

1.17 Definition Ein A-Bimodul X (Schreibweise $_AX_A$) ist ein A-Linksmodul und auch ein A-Rechtsmodul, sodass $(ax)b = a(xb)$ für alle $x \in X$ und $a, b \in A$.

Beispiel Es ist A ein A-Bimodul, da für $x, a, b \in A$ wegen Assoziativität $(ax)b = a(xb)$ gilt.

1.18 Proposition

(a) *Ist $_AX_A$ ein A-Bimodul und $_AY$ ein A-Linksmodul, so ist* $\mathrm{Hom}_A({_AX}, {_AY})$ *ein A-Linksmodul durch $af\colon x \mapsto f(xa)$ für $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $a \in A$ und $x \in X$.*

(b) *Ist $_AX$ ein A-Linksmodul und $_AY_A$ ein A-Bimodul, so ist* $\mathrm{Hom}_A({_AX}, {_AY})$ *ein A-Rechtsmodul durch $fa\colon x \mapsto f(x)a$ für $f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$, $a \in A$ und $x \in X$.*

Beweis. (a): Wir zeigen, dass af ein A-Linksmodulhomomorphismus ist. Seien $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann ist

$$(af)(bx) = f((bx)a) = f(b(xa)) = bf(xa) = b(af)(x).$$

Nun zeigen wir, dass $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ damit ein A-Linksmodul ist. Seien dazu wieder $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann gilt

$$((ab)f)(x) = f(x(ab)) = f((xa)b) = (bf)(x) = a(bf)(x).$$

(b): Wir zeigen, dass fa ein A-Linksmodulhomomorphismus ist. Seien $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann ist

$$(fa)(bx) = f(bx)a = (bf(x))a = b(f(x)a) = b(fa)(x).$$

Nun zeigen wir, dass $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ damit ein A-Rechtsmodul ist. Seien dazu wieder $a, b \in A$ und $x \in X$. Dann gilt

$$(f(ab))(x) = f(x)(ab) = (f(x)a)b = ((fa)(x))b = ((fa)b)(x).$$ □

1.19 Proposition *Sei ${}_AY$ ein A-Linksmodul. Dann ist*

$$\alpha\colon {}_A(\mathrm{Hom}_A({}_AA, {}_AY)) \xrightarrow{\sim} {}_AY, \ f \mapsto f(1)$$

ein Isomorphismus von A-Linksmoduln.

Beweis. Es ist α ein A-Linksmodulhomomorphismus, da für $a \in A$ und $f \in \mathrm{Hom}_A(A, Y)$ gilt

$$\alpha(af) = (af)(1) = f(1 \cdot a) = f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = a\alpha(f).$$

Es ist α surjektiv, da für $y \in Y$ die Abbildung $f\colon A \to Y$ definiert durch $f(a) = ay$ ein Homomorphismus von A-Linksmoduln ist mit $\alpha(f) = f(1) = 1 \cdot y = y$.

Es ist α injektiv, da $\alpha(f) = f(1) = 0$ für $a \in A$ stets $f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = a \cdot 0 = 0$ impliziert, also $f = 0$. □

1.20 Proposition

(a) *Sei ${}_AM$ ein A-Linksmodul. Sei $E = \mathrm{Hom}_A({}_AM, {}_AM)$ der* Endomorphismenring *von ${}_AM$. Dann ist M ein A-E-Bimodul.*

(b) *Seien ${}_AX, {}_AY \in A$*-`mod`. *Dann ist* $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ *ein* $\mathrm{End}_A(X)$-$\mathrm{End}_A(Y)$*-Bimodul.*

Beweis. (a): Sei $m \in M$ und $f \in \mathrm{End}_A(M)$. Definiere die E-Rechtsmodulstruktur auf M durch $mf := f(m) \in M$. Für $f, g \in \mathrm{End}_A(M)$ ist dann 31.10.2016

$$m(fg) = (fg)(m) = g(f(m)) = (mf)g.$$

Beachte hierbei wieder die Konvention zur Komposition von linearen Abbildungen. Die restlichen Rechtsmodulaxiome übertragen sich unmittelbar. Es ist nun M ein A-E-Bimodul, da für $a \in A$, $m \in M$ und $f \in \mathrm{End}_A(M)$ gilt

$$(am)f = f(am) = a(fm) = a(mf).$$

(b): Sei $(\varphi\colon X \to Y) \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$. Für $(f\colon X \to X) \in \mathrm{End}_A(X)$ definiere die $\mathrm{End}_A(X)$-Linksmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ durch Präkomposition mit f. Für $(g\colon Y \to Y) \in \mathrm{End}_A(Y)$ definiere die $\mathrm{End}_A(Y)$-Rechtsmodulstruktur auf $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ durch Postkomposition mit g.

Die Bimoduleigenschaft folgt dann aus der Assoziativität der Komposition von Abbildungen, also $(f\varphi)g = f(\varphi g)$. □

Bemerkung Wir vegleichen Proposition 1.20 (b) mit Proposition 1.18.

In Proposition 1.18 wird gezeigt, dass $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ ein A-A-Bimodul ist, falls X oder Y ein A-A-Bimodul ist.

Ist nun beispielsweise $X = {}_AX_A$ ein A-A-Bimodul, so erhalten wir den A-Linksmodulhomomorphismus

$$A \to \mathrm{End}_A({}_AX), \; a \mapsto (x \mapsto xa).$$

Nun ist die A-Operation auf $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$ aus Proposition 1.18 für $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ und $a \in A$ gegeben durch

$$a\varphi \colon x \mapsto \varphi(xa).$$

Nutzen wir nun oben angegebenen Homomorphismus $A \to \mathrm{End}_A(X)$, $a \mapsto f : (x \mapsto xa)$, so liefert die $\mathrm{End}_A(X)$-Operation auf $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ aus Proposition 1.20 die A-Operation

$$a\varphi := f\varphi \colon x \mapsto \varphi(f(x)) = \varphi(xa).$$

Somit folgt Proposition 1.18 aus Proposition 1.20 (b). Im Allgemeinen ist jedoch $\mathrm{End}_A({}_AX)$ verschieden von A.

2 Darstellungen von Köchern

Sei k ein Körper, $Q = (Q_0, Q_1)$ ein Köcher mit $|Q_0| < \infty$ und Einselement $1_{kQ} = \sum_{i \in Q_0} e_i$.
Sei V ein kQ-Rechtsmodul. Setze
$$V(i) := Ve_i$$
für $i \in Q_0$. Beachte $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$, $e_i^2 = e_i$ und $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$. Damit ist für $v \in V$:
$$v = v1 = v \left(\sum_{i \in Q_0} e_i \right) = \sum_{i \in Q_0} ve_i,$$
d.h. es gilt $V = \sum_{i \in Q_0} V(i)$. Sei nun $v \in V(i) \cap \sum_{i \neq j \in Q_0} V(j)$. Wegen $v \in V(i)$ ist $v = v'e_i$ mit $v' \in V$. Dann ist aber $ve_i = v'e_i^2 = v'e_i = v$, also $v = ve_i$. Wegen $v \in \sum_{i \neq j} V(j)$ ist $v = \sum_{j \neq i} u_j e_j$, also gilt
$$v = ve_i = \left(\sum_{j \neq i} u_j e_j \right) e_i = \sum_{j \neq i} u_j e_j e_i = \sum_{j \neq i} e_j \cdot 0 = 0.$$
Also ist $V = \bigoplus_{i \in Q_0} V(i)$.
Sei nun $\alpha \in Q_1$ ein Pfeil in Q. Da $\alpha \in kQ$, erhalten wir eine k-lineare Abbildung $V \to V,\ v \mapsto v\alpha$. Sei $s(\alpha) = i$ und $t(\alpha) = j$. Dann ist $\alpha = e_i \alpha e_j$ in kQ. Damit ist für $ve_\ell \in V(\ell)$ für $\ell \in Q_0$
$$(ve_\ell)\alpha = (ve_\ell)(e_i \alpha e_j) = v(e_\ell e_i)\alpha e_j = \begin{cases} 0 & \ell \neq i \\ (v\alpha)e_j & \ell = i \end{cases}.$$
Somit erhalten wir für jedes $\alpha \in Q_1$ mit $s(\alpha) = i$ und $t(\alpha) = j$ eine k-lineare Abbildung
$$V(\alpha) \colon V(i) \to V(j),\ v \mapsto v\alpha.$$
Also erhalten wir zu jedem kQ-Rechtsmodul k-Vektorräume $V(i)$ für jeden Punkt $i \in Q_0$ und k-lineare Abbildungen $V(\alpha)$ für jeden Pfeil $\alpha \in Q_1$. Wir schreiben die Vektorräume $V(i)$ an die Punkte des Köchers und die Abbildungen $V(\alpha)$ an die Pfeile des Köchers, zum Beispiel für den Köcher
$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$
schreiben wir für einen kQ-Rechtsmodul V mit den obigen Konstruktionen
$$V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2) \xrightarrow{V(\beta)} V(3).$$

2.1 Definition Sei $Q = (Q_0, Q_1)$ ein Köcher. Eine *Darstellung des Köchers Q* über einem Körper k besteht aus zwei Zuordnungen
$$Q_0 \ni i \quad \longmapsto \quad V(i) \in k\text{-}\mathtt{Mod}$$
$$Q_1 \ni (\alpha \colon s(\alpha) \to t(\alpha)) \quad \longmapsto \quad (V(\alpha) \colon V(s(\alpha)) \to V(t(\alpha)))\ k\text{-linear.}$$
Bezeichnung: $V = ((V(i))_{i \in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha \in Q_1}) \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$.

Beispiel Für den Köcher

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

erhalten wir Darstellungen über einem Körper k durch

$$k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k \qquad\qquad k \xrightarrow{27} k \xrightarrow{\frac{1}{3}} k$$

$$k \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} k \qquad\qquad k \xrightarrow{\binom{1}{1}} k^2 \xrightarrow{(0\ 1)} k.$$

2.2 Proposition *Eine Darstellung des Köchers Q über k definiert genau einen kQ-Rechtsmodul. Wir erhalten eine bijektive Zuordnung* $\texttt{Mod-}kQ \leftrightarrow kQ\texttt{-Rep}$.

Beweis. Sei $V = \big((V(i))_{i\in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha\in Q_1}\big) \in kQ\texttt{-Rep}$. Setze $\hat{V} = \bigoplus_{i\in Q_0} V(i)$. Wir definieren eine kQ-Rechtsmodulstruktur auf $\hat{V}$.

Für faule Wege: Für $v = \sum_{j\in Q_0} v_j$ mit $v_j \in V(j)$ sei $ve_i := v_i$, d.h. Multiplikation mit e_i ist die Identität auf $V(i)$ und die Nullabbildung sonst.

Für Pfeile: Sei $\alpha \in Q_1$. Für $v = \sum_{j\in Q_0} v_j$ mit $v_j \in V(j)$ sei $v\alpha := v_{s(\alpha)}V(\alpha) \in V(t(\alpha))$, d.h. Multiplikation mit α ist die Abbildung $V(\alpha)\colon V(s(\alpha)) \to V(t(\alpha))$ auf $V(s(\alpha))$ und die Nullabbildung sonst.

Für allgemeine Wege: Sei $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ein Weg in Q. Für $v = \sum_{j\in Q_0} v_j$ mit $v_j \in V(j)$ sei $v(\alpha_1,\dots,\alpha_n) := v_{s(\alpha_1)}(V(\alpha_1)\cdots V(\alpha_n))) \in V(t(\alpha_n))$, d.h. die Hintereinanderausführung der Operation von Pfeilen.

Die Operation auf den Basiselementen wird linear fortgesetzt zu einer kQ-Rechtsoperation. □

2.3 Definition Seien $V = \big((V(i))_{i\in Q_0}, (V(\alpha))_{\alpha\in Q_1}\big)$ und $W = \big((W(i))_{i\in Q_0}, (W(\alpha))_{\alpha\in Q_1}\big)$ Darstellungen eines Köchers Q über einem Körper k.

Ein *Homomorphismus von Köcherdarstellungen* $f\colon V \to W$ besteht aus linearen Abbildungen $f(i)\colon V(i) \to W(i)$ für alle $i \in Q_0$, sodass $xV(\alpha)f(t(\alpha)) = xf(s(\alpha))W(\alpha)$ für alle $\alpha \in Q_1$ und $x \in V(s(\alpha))$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
V(s(\alpha)) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "f(s(\alpha))"] & V(t(\alpha)) \arrow[d, "f(t(\alpha))"] \\
W(s(\alpha)) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(t(\alpha))
\end{tikzcd}$$

Es heißt f *Isomorphismus*, falls $f(i)$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen ist für alle $i \in Q_0$.

Beispiele

- Sei Q der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil.

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop right, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

Sind $V = (V(1), V(\alpha))$ und $W = (W(1), W(\alpha))$ Darstellungen von Q über einem Körper k, so ist ein Isomorphismus zwischen V und W gegeben durch einen k-linearen Isomorphismus $T\colon V(1) \to W(1)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "T"] & V(1) \arrow[d, "T"] \\
W(1) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(1)
\end{tikzcd}$$

Somit gilt $W(\alpha) = T^{-1}V(\alpha)T$. Die kanonische rationale Form, bzw. die Jordansche Normalform falls k algebraisch abgeschlossen ist, geben somit Normalformen für Darstellungen von Q.

- Sei Q der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil gegeben durch

$$1 \xrightarrow{\alpha} 2.$$

Sind wieder V und W Darstellungen von Q über k, so ist ein Isomorphismus zwischen V und W gegeben durch zwei k-lineare Isomorphismen $S\colon V(1) \to W(1)$ und $T\colon V(2) \to W(2)$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "S"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(2) \end{tikzcd}$$

Somit gilt $W(\alpha) = S^{-1}V(\alpha)T$. Der Gauß-Algorithmus liefert hier eine Normalform für Darstellungen von Q: Durch geeignete S und T kann $V(\alpha)$ auf die Form

$$V(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Somit gibt es eine Basis B von $V(1)$ und eine Basis C von $V(2)$, als auch ganze Zahlen $n, \ell, m \geq 0$ mit $\dim V(1) = n + \ell$ und $\dim V(2) = n + m$, sodass gilt 02.11.2016

$$\begin{array}{rclll} V(1) & \xrightarrow{V(\alpha)} & V(2) & & \\ b_i & \longmapsto & c_i & \simeq k \xrightarrow{1} k & \text{für } i = 1, \ldots, n \\ b_i & \longmapsto & 0 & \simeq k \xrightarrow{0} 0 & \text{für } i = n+1, \ldots, n+\ell \\ & & c_i & \simeq 0 \xrightarrow{0} k & \text{für } i = n+1, \ldots, n+m \end{array}$$

Damit ist jede Darstellung des Köchers Q eine direkte Summe von Darstellungen der Form

$$k \xrightarrow{1} k \qquad k \xrightarrow{0} 0 \qquad 0 \xrightarrow{0} k.$$

Da die zugehörigen kQ-Rechtsmoduln zu $k \xrightarrow{0} 0$ und $0 \xrightarrow{0} k$ eindimensional über k sind, sind diese beiden Darstellungen unzerlegbar.

Wäre $k \xrightarrow{1} k$ zerlegbar, so muss $k \xrightarrow{1} k = (k \xrightarrow{0} 0) \oplus (0 \xrightarrow{0} k)$ gelten. Dann gibt es $\lambda, \mu \in k \setminus \{0\}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ 0 \end{smallmatrix}\right)"'] & k \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mu \end{smallmatrix}\right)"] \\ k \oplus 0 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & 0 \oplus k \end{tikzcd}$$

Da jedoch die untere Zeile 0 ist, kann dieses Diagramm nicht kommutieren. Also ist auch $k \xrightarrow{1} k$ unzerlegbar.

Ergebnis: Der Köcher $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ hat bis auf Isomorphie genau 3 verschiedene unzerlegbare Darstellungen.

Bemerkung Wir zeigen, dass Homomorphismen von Köcherdarstellungen genau den Homomorphismen von kQ-Rechtsmoduln entsprechen.

Dazu seien $\hat{V} = \bigoplus_{i \in Q_0} V(i)$ und $\hat{V} = \bigoplus_{i \in Q_0} W(i)$ zwei kQ-Rechtsmoduln, mit entsprechenden Darstellungen $V = ((V(i))_i, (V(\alpha))_\alpha)$ und $W = ((W(i))_i, (W(\alpha))_\alpha)$.

Ist nun $f\colon \hat{V} \to \hat{W}$ eine kQ-lineare Abbildung, so ist $(ve_i)f = (ve_i^2)f = (ve_i)fe_i \in V(i)$, d.h. wir erhalten durch Einschränken k-lineare Abbildungen $f(i)\colon V(i) \to V(i)$, sodass

$$f = \begin{pmatrix} f(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(n) \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\alpha \in Q_1$ ein Pfeil in Q. Nach Konstruktion ist die Kommutativität der folgenden beiden Diagramme äquivalent.

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "-\cdot\alpha"] \arrow[d, "f(i)"] & V(j) \arrow[d, "f(j)"] \\ W(i) \arrow[r, "-\cdot\alpha"] & W(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "f(i)"] & V(j) \arrow[d, "f(i)"] \\ W(i) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(j) \end{tikzcd}$$

Modulhom. $\Leftrightarrow$ Hom. von Darstellungen

Die Aussage gilt analog für faule Wege e_i für $i \in Q_0$. Für Wege beachte, dass das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "f(i)"] & V(j) \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, "f(j)"] & V(k) \arrow[d, "f(k)"] \\ W(i) \arrow[r, "W(\alpha)"] & W(j) \arrow[r, "W(\beta)"] & W(k) \end{tikzcd}$$

auf Grund der Kommuativität aller einzelnen Quadrate insgesamt kommutiert, wodurch die Äquivalenz für die Wege auf die Äquivalenz für Pfeile zurückgeführt wird.

Beispiel Gegeben sei ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung in den Funktionen $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ mit konstanten Koeffizienten, d.h. es gibt Matrizen A und B und eine Funktion f mit

$$Ax + B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f.$$

Frage: Wie können A und B vereinfacht werden? Gehe durch invertierbare Matrizen S und T über zur Differentialgleichung

$$(SAT)z + (SBT)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = g.$$

Also gehe vom Paar (A, B) über zu (SAT, SBT). Gesucht: Gemeinsame Normalform für das Paar (A, B) von Matrizen gleicher Größe.

- Weierstrass 1867: Normalform für gewisse A, B (mit $\det(A + \lambda B) \neq 0$).
- Kronecker 1890: allgemeine Lösung.

Betrachte den *Kroneckerköcher*

$$Q = \left(\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & 2 \end{tikzcd} \right).$$

Eine Darstellung V von Q über k besteht aus zwei Vektorräumen $V(1)$ und $V(2)$ und zwei linearen Abbildungen $V(1) \xrightarrow{A,B} V(2)$. Ist W eine weitere Darstellung von Q, so ist ein Isomorphismus von V und W gegeben durch k-lineare Isomorphismen, d.h. invertierbare Matrizen, S und T, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, shift left, "A"] \arrow[r, shift right, "B"'] \arrow[d, "S^{-1}"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, shift left, "SAT"] \arrow[r, shift right, "SBT"'] & W(2) \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "A"] \arrow[d, "S^{-1}"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, "SAT"] & W(2) \end{tikzcd} \text{ und } \begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "S^{-1}"] & V(2) \arrow[d, "T"] \\ W(1) \arrow[r, "SBT"] & W(2) \end{tikzcd}$$

Somit ist das oben beschriebene Normalformenproblem äquivalent zum Isomorphieproblem für Darstellungen des Kroneckerköchers.

Wir bezeichnen die Wegealgebra kQ des Kroneckerköchers als *Kroneckeralgebra*. Für die Dimension von kQ gilt $\dim kQ = 4$. Wir suchen eine treue Darstellung $kQ \hookrightarrow \mathrm{M}_n(k)$ mit kleinstem n.

- Für $n = 1$ kann aus Dimensionsgründen keine treue Darstellung existieren.
- Für $n = 2$ gilt aus Dimensionsgründen dann $kQ \simeq \mathrm{M}_2(k)$. Es ist $\langle \alpha, \beta \rangle_k$ ein echtes zweiseitiges Ideal in kQ. Doch ist $\mathrm{M}_2(k)$ einfach, hat also keine echten zweiseitigen Ideale ungleich 0.
- Für $n = 3$ erhalten wir eine treue Darstellung durch

$$kQ \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} k & k & k \\ k & k & k \\ k & k & k \end{pmatrix},$$

  wobei die Bilder der Basiselemente gegeben sind durch

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen Beispiele von Köcherdarstellungen des Kroneckerköchers geben. Wir erhalten zwei nichtisomorphe einfache (d.h. die entsprechenden kQ-Rechtsmoduln sind einfach) Köcherdarstellungen durch

$$0 \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} k \qquad\qquad k \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} 0.$$

Damit sind bis auf Isomorphie alle einfachen kQ-Rechtsmoduln gegeben, da für eine Darstellung

$$V(1) \overset{A}{\underset{B}{\rightrightarrows}} V(2)$$

für $V(2) \neq 0$ stets $0 \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} k$ einen Teilmodul liefert.

Ist hingegen $V(2) = 0$, so hat $V(1) \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} 0$ stets $k \overset{0}{\underset{0}{\rightrightarrows}} 0$ als Teilmodul.

Zu einer Darstellung V von kQ sei $\underline{\dim} V := (\dim V(i))_{i \in Q_0}$ der *Dimensionsvektor* von V.

Für $\lambda, \mu \in k$ betrachte Darstellungen mit $\underline{\dim} V = (1,1)$ des Kroneckerköchers gegeben durch

$$k \overset{\lambda}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k.$$

Angenommen, es seien auch $s, t \in k$ und $a, b \in k \setminus \{0\}$ liefern einen Isomorphismus von Darstellungen

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, shift left, "\lambda"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] \arrow[d, "a"] & k \arrow[d, "b"] \\ k \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & k. \end{tikzcd}$$

Dann gilt $as = \lambda b$ und $at = \mu b$, also wegen $b \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{a}{b} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

Somit sind die Darstellungen $k \overset{\lambda}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k$ und $k \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} k$ isomorph genau dann, wenn es ein $c \in k\backslash\{0\}$ gibt mit $\left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) = c\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right)$. Anders ausgedrückt, eine Parametermenge für Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen des Kroneckerköchers mit Dimensionsvektor $(1, 1)$ ist durch die projektive Gerade $\mathbf{P}^1(k)$ gegeben. Eine "Normalform" erhalten wir für $\mu \in k$ durch

$$k \overset{1}{\underset{\mu}{\rightrightarrows}} k \qquad \text{und} \qquad k \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} k.$$

Beispiel Sei A die k-Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen. Dann ist $A \simeq kQ$ mit dem Köcher 14.11.2016

$$Q = \left(1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3\right).$$

Wir wollen die unzerlegbaren Darstellungen von Q über k bestimmen.

Betrachte die einfachen Darstellungen $k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$, $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$ und $0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$. Diese sind paarweise nicht isomorph, da zum Beispiel im folgenden Diagramm

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[d, "\wr"] \\ 0 \arrow[r] & k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

keine vertikalen Isomorphismen in den ersten beiden Spalten existieren können.

Betrachte nun die Darstellungen $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$, $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$ und $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$. Wir behaupten, dass diese Darstellungen unzerlegbar sind.

Angenommen, $M = k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k$ wäre zerlegbar. Dann gibt es $X, Y \neq 0$ mit $M \simeq X \oplus Y$ und die Projektion $M \twoheadrightarrow X$ verknüpft mit der Inklusion $X \hookrightarrow M$ liefert einen Endomorphismus $p \colon M \to M$. Es ist $\operatorname{Im}(p) = X$ und wegen

$$\begin{tikzcd} p^2\colon M \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & M \\ & X \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "\mathrm{id}_X"] & & X \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

ist $p^2 = p$. Also: Ist M zerlegbar, so gibt es $p = p^2 \in \operatorname{End}(M)$ mit $p \neq 0, \mathrm{id}$.

Wir zeigen nun, dass M unzerlegbar ist, indem wir zeigen, dass es kein solches p gegen kann. Ein $p \in \operatorname{End}(M)$ ist gegeben durch $a, b, c \in k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "a"] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "b"] & k \arrow[d, "c"] \\ k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r, "1"] & k \end{tikzcd}$$

Doch dann ist $a = b = c$ und wegen $p^2 = p$ also $a = 0, 1$, somit $p = 0, \mathrm{id}$. Daher ist M unzerlegbar.

Auf ähnliche Weise erhalten wir mit den drei einfachen Darstellungen von oben 6 unzerlegbare, paarweise nicht isomorphe Darstellungen von Q über k.

Zeige nun: Jede unzerlegbare Darstellung von Q ist isomorph zu einer dieser 6 Darstellungen.

Dazu sei $V = \left(V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2) \xrightarrow{V(\beta)} V(3) \right)$ unzerlegbar.

Erster Schritt: Angenommen, $V(\alpha)$ sei nicht injektiv. Dann ist $\mathrm{Kern}(V(\alpha)) \neq 0$, also ist durch $V(1) \simeq \mathrm{Kern}(V(\alpha)) \oplus X$ eine nicht triviale Zerlegung von $V(1)$ als k-Vektorräume gegeben.

Mit Inklusion $\mathrm{Kern}(V(\alpha)) \hookrightarrow V(1)$ und Projektion $V(1) \twoheadrightarrow \mathrm{Kern}(V(\alpha))$ erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, "f"] & \mathrm{Kern}(V(\alpha)) \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
V \arrow[d, "g"] & V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, two heads] & V(2) \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, "0"] & V(3) \arrow[d, "0"] \\
U & \mathrm{Kern}(V(\alpha)) \arrow[r, "0"] & 0 \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist $fg = \mathrm{id}_U$ zudem $gfgf = gf$ mit f injektiv und g surjektiv. Daher ist $V = U \oplus \mathrm{Kern}(g)$ eine Zerlegung von Darstellungen. Da $U \neq 0$ und V unzerlegbar, ist $U = V$, daher $V(2) = V(3) = 0$ und damit $V(1) = k$, also $V \simeq \left(k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0\right)$.

Analog: Ist $V(\beta)$ nicht surjektiv, so ist $0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$ direkter Summand von V.

Zweiter Schritt: Angenommen, $V(\alpha)$ ist injektiv und $V(\beta)$ ist surjektiv.

Falls $V(1) = 0$, so ist $V = \left(0 \xrightarrow{0} V(2) \xrightarrow{V(\beta)} V(3)\right)$. Die Gauß-Normalform liefert, dass nun $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{1} k$, $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$ oder $0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} k$ ein direkter Summand von V ist. Da V jedoch unzerlegbar ist, ist V isomorph zu einer dieser 3 Darstellungen.

Falls $V(3) = 0$, so ist $V = \left(V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} V(2) \xrightarrow{0} 0\right)$. Wieder liefert die Gauß-Normalform, dass nun $k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} 0$, $k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$ oder $0 \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0$ ein direkter Summand von V ist. Da V jedoch unzerlegbar ist, ist V isomorph zu einer dieser 3 Darstellungen.

Sei nun $V(1) \neq 0 \neq V(3)$. Zeige: $V \simeq \left(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k\right)$.

Da $V(\alpha)$ injektiv ist, können wir $V(1) \subseteq V(2)$ als Teilmenge entlang $V(\alpha)$ identifizieren.

Angenommen, $V(\beta)$ ist nicht injektiv. Dann ist $U := \mathrm{Kern}(V(\beta)) \neq 0$.

Zeige: $V(1) \cap U \xhookrightarrow{V(\alpha)} U \xrightarrow{V(\beta)} 0$ ist direkter Summand von V.

Dazu wähle eine Basis von $U \cap V(1)$ und ergänze diese zu einer Basis von $V(1)$, d.h. erhalte $V(1) = U \cap V(1) \oplus X$. Nun ergänze die Basis von $U \cap V(1)$ zu einer Basis von U und ergänze diese Basis zu einer von $V(2)$, d.h. $V(2) = U \oplus Y$. Dann ist $U \cap V(1) \subseteq U$ und $X \subseteq Y$. Insgesamt erhalten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
U \cap V(1) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U = \mathrm{Kern}(V(\beta)) \arrow[r, "0"] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[d, "0"] \\
V(1) = U \cap V(1) \oplus X \arrow[r, hook, "V(\alpha)"] \arrow[d, two heads] & V(2) = U \oplus Y \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, two heads] & V(3) \arrow[d, "0"] \\
U \cap V(1) \arrow[r, hook] & U \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $U \cap V(1) \xrightarrow{V(\alpha)} U \xrightarrow{0} 0$ ein direkter Summand von V ist, im *Widerspruch* zu V unzerlegbar.

Also ist $U = 0$ und $V(\beta)$ ist ein Isomorphismus. Analog zeige, dass $V(\alpha)$ ein Isomorphismus ist.

Damit erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, in dem die vertikalen Homomorphismen Isomorphismen sind.

$$\begin{tikzcd} V(1) \arrow[r, "V(\alpha)"] \arrow[d, "V(\alpha)"', "\wr"] & V(2) \arrow[r, "V(\beta)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"', "\wr"] & V(3) \arrow[d, "V(\beta)^{-1}"', "\wr"] \\ V(1) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V(2) \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V(3) \end{tikzcd}$$

Also ist $V \simeq \left(V(1) \xrightarrow{\mathrm{id}} V(2) \xrightarrow{\mathrm{id}} V(3)\right)$ und daher, da $V(1) = V(2) = V(3) \simeq k^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$ also

$$V \simeq \left(k^n \xrightarrow{I_n} k^n \xrightarrow{I_n} k^n\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \left(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k\right).$$

Da V unzerlegbar, ist also $V \simeq \left(k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{1} k\right)$.

Analog kann gezeigt werden: Die unzerlegbaren Darstellungen von Köchern der Form

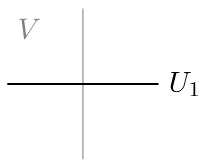
$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \ldots \longrightarrow \bullet.$$

sind alle dünn, d.h. für alle j ist $V(j)$ entweder k oder 0 und die linearen Abbildungen sind entweder 0 oder 1.

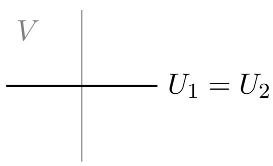
Beispiel (n-Unterraumprobleme) Sei V ein k-Vektorraum und $n \in \mathbf{N}$ mit $\ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbf{N}_0$. Suche, bis auf Basiswechsel in V, Unterräume $U_1, \ldots, U_n$ von V mit $\dim U_j = \ell_j$ für alle j.

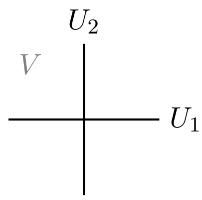
Für $\dim V = 2$, *alle* $\ell_j = 1$.

- $n = 1$: Eine Gerade in der Ebene.

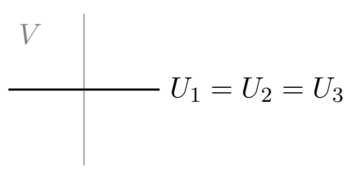


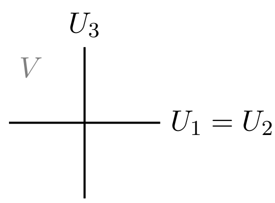
- $n = 2$: Wir können durch Basiswechsel die folgenden beiden Konfigurationen erreichen.

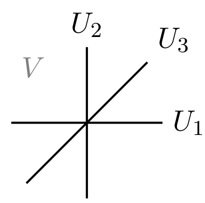




- $n = 3$: Durch Basiswechsel erreichen wir, bis auf Umordnung, die folgenden drei Konfigurationen.







  Im letzten Fall ordnen wir erst U_1 und U_2 wie gewünscht an und nutzen dann eine Basistransformation der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \neq 0$.

- $n = 4$: Hier gibt es unendliche viele verschiedene Konfigurationen. Beachte, dass 4 Geraden in der Ebene genau 4 Punkten auf der projektiven Geraden entsprechen. Das Doppelverhältnis dieser 4 Punkte ist dann eine Invariante (Beweis mit Darstellungstheorie später).

Wir suchen unzerlegbare Konfigurationen. Dabei heiße eine Konfiguration zerlegbar, d.h. es ist

$$(V, U_1, \ldots, U_n) = (V^{(1)}, U_1^{(1)}, \ldots, U_n^{(1)}) \oplus (V^{(2)}, U_1^{(2)}, \ldots, U_n^{(2)}),$$

falls gilt

$$V = V^{(1)} \oplus V^{(2)} \text{ und } U_j = U_j^{(1)} \oplus U_j^{(2)} \text{ für alle } j.$$

Nun betrachte den n-*Unterraumköcher*:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
1 \arrow[urr, "\alpha_1"] & 2 \arrow[ur, "\alpha_2"'] & \cdots & \cdots & n. \arrow[ull, "\alpha_n"']
\end{tikzcd}$$

Dieser hat Darstellungen der Form

$$\begin{tikzcd}
 & & V_0 & & \\
U_1 \arrow[urr, "V(\alpha_1)"] & U_2 \arrow[ur, "V(\alpha_2)"'] & \cdots & \cdots & U_n, \arrow[ull, "V(\alpha_n)"']
\end{tikzcd}$$

welche wir mit V bezeichnen wollen. Sei nun V eine unzerlegbare Darstellung des n-Unterraumköchers. Ist nun $V(\alpha_1)$ nicht injektiv, so ist

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
\mathrm{Kern}(V(\alpha_1)) \arrow[urr, "V(\alpha_1)"] & 0 \arrow[ur, "0"'] & \cdots & \cdots & 0 \arrow[ull, "0"']
\end{tikzcd}$$

ein direkter Summand von V. Da V unzerlegbar, ist V also isomorph zu

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & & \\
k \arrow[urr, "0"] & 0 \arrow[ur, "0"'] & \cdots & \cdots & 0, \arrow[ull, "0"']
\end{tikzcd}$$

d.h. V ist einfach. Analog für α_j.

Insgesamt erhalten wir: Ist die Darstellung V unzerlegbar, so ist V einfach oder alle $V(\alpha_j)$ sind injektiv.

Im letzten Fall beschreibt V aber eine Unterraumkonfiguration.

Weiterhin ist ein Isomorphismus von Darstellungen $V^{(1)} \simeq V^{(2)}$ durch einen Basiswechsel von $V^{(1)}$ zu $V^{(2)}$ gegeben, der durch die Injektionen $V(\alpha_i)$ auf $U_j^{(1)}$ zu $U_j^{(2)}$ einschränkt.

Daher sind alle Unterraumkonfigurationen gegeben durch die Isomorphieklassen unzerlegbarer Darstellungen des n-Unterraumköchers abzüglich der einfachen Darstellungen für einen festen Dimensionsvektor $\underline{\dim}\, V = (\dim V_0, \dim U_1, \ldots, \dim U_n)$.

Die zuvor genannten Beispiele lassen sich nun einfach übertragen.

- $n = 1$: Hier gibt es nur einen Isomorphietyp vom gewünschten Dimensionsvektor, welcher gegeben ist durch

$$\begin{tikzcd}
k^2 & & k & & k \\
k \arrow[u] & \simeq & k \arrow[u, "1"] & \oplus & 0 \arrow[u, "0"]
\end{tikzcd}$$

- $n = 2$: Hier gibt es zwei Isomorphietypen.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k^2 & \\
k \arrow[ur] & & k \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k & \\
k \arrow[ur, "1"] & & k \arrow[ul, "1"']
\end{tikzcd}
\oplus
\begin{tikzcd}
k \\
0 \arrow[u, "0"]
\end{tikzcd}
\quad \text{oder} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k^2 & \\
k \arrow[ur] & & k \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}
k \\
k \arrow[u, "1"]
\end{tikzcd}
\oplus
\begin{tikzcd}
k \\
k \arrow[u, "1"]
\end{tikzcd}
$$

- $n = 3$: Hier gibt es drei Isomorphietypen.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k^2 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k & \\
k \arrow[ur, "1"] & k \arrow[u, "1"] & k \arrow[ul, "1"']
\end{tikzcd}
\oplus
\begin{tikzcd}
k \\
0 \arrow[u, "0"]
\end{tikzcd}
\quad \text{oder} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k^2 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k & \\
k \arrow[ur, "1"] & & k \arrow[ul, "1"']
\end{tikzcd}
\oplus
\begin{tikzcd}
k \\
k \arrow[u, "1"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\text{oder} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & k^2 & \\
k \arrow[ur] & k \arrow[u] & k \arrow[ul]
\end{tikzcd}
\simeq
\begin{tikzcd}
 & k^2 & \\
k \arrow[ur, "\binom{1}{0}"] & k \arrow[u, "\binom{1}{1}"] & k \arrow[ul, "\binom{0}{1}"']
\end{tikzcd}
$$

Nun zu $n = 4$: Gesucht sind Konfigurationen von 4 Geraden in einer Ebene. Falls mindestens 16.11.2016
zwei Geraden übereinstimmen, gibt es wie oben nur endlich viele Möglichkeiten. Wie bei $n = 3$ können wir durch Basiswechsel die folgende Form erreichen:

$$
\begin{tikzcd}
 & & k^2 = V_0 & & \\
k = U_1 \arrow[urr, "\binom{1}{0}"] & k = U_2 \arrow[ur, "\binom{0}{1}"'] & & k = U_3 \arrow[ul, "\binom{1}{1}"] & k = U_4 \arrow[ull, "\binom{a}{b}"']
\end{tikzcd}
$$

Frage: Wie viele verschiedene Konfigurationen erhalten wir, wenn $\binom{a}{b}$ variiert?

Seien $k \ni \alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ und $\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ x & y \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(k)$ gegeben, sodass diese einen Isomorphismus von Darstellungen des 4-Unterraumköchers wie oben bilden. Also kommutieren die folgenden vier Diagramme.

$$
\begin{tikzcd}
k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ x & y \end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\
k \arrow[u, "\binom{1}{0}"] \arrow[r, "\alpha"] & k \arrow[u, "\binom{1}{0}"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ x & y \end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\
k \arrow[u, "\binom{0}{1}"] \arrow[r, "\beta"] & k \arrow[u, "\binom{0}{1}"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ x & y \end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\
k \arrow[u, "\binom{1}{1}"] \arrow[r, "\gamma"] & k \arrow[u, "\binom{1}{1}"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
k^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} p & q \\ x & y \end{smallmatrix}\right)"] & k^2 \\
k \arrow[u, "\binom{a}{b}"] \arrow[r, "\delta"] & k \arrow[u, "\binom{c}{d}"']
\end{tikzcd}
$$

Damit erhalten wir die folgenden Gleichungen.

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha &&\Rightarrow && \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} &&\Rightarrow && x = 0 \text{ und } p = \alpha \\
&\begin{pmatrix} \alpha & q \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \beta &&\Rightarrow && \begin{pmatrix} q \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} &&\Rightarrow && q = 0 \text{ und } y = \beta \\
&\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma &&\Rightarrow && \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} &&\Rightarrow && \alpha = \beta = \gamma \\
&\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \delta &&\Rightarrow && \gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} && &&
\end{aligned}
$$

Doch dann erzeugen $\binom{a}{b}$ und $\binom{c}{d}$ dieselbe Gerade, also kann die vierte Gerade nicht durch einen Isomorphismus verändert werden.

Also ist eine “Normalform” für Darstellungen des 4-Unterraumköchers wie oben gegeben durch $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \lambda \end{smallmatrix}\right)$ mit $\lambda \in k$ oder $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. die projektive Gerade $\mathbf{P}^1(k)$ ist ein Parameterraum für Konfigurationen von 4 Geraden in der Ebene.

Noch zu zeigen: Diese Konfigurationen sind unzerlegbar. Dazu bestimme den Endomorphismenring dieser Darstellungen. Wie oben erhalten wir

$$\begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} = \gamma \,\mathrm{id} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma \in k.$$

Also ergibt sich End $= k$, d.h. die Darstellungen sind alle unzerlegbar.

2.4 Proposition *Sei* $\dim kQ < \infty$ *und* $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. *Dann sind* $S(1), \dots, S(n)$ *bis auf Isomorphie genau alle einfachen kQ-Moduln, wobei*

$$S(i)_j = \begin{cases} k & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Jedes $M \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$ *mit* $M \neq 0$ *hat mindestens ein solches* $S(i)$ *als Teilmodul.*

Beweis. Sei $M \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$ mit $M \neq 0$. Definiere den *Träger* von M als

$$\mathrm{Supp}(M) = \{i \in Q_0 : M(i) \neq 0\}.$$

Da $\dim kQ < \infty$ besitzt Q keine zyklischen Wege und da $M \neq 0$ gibt es ein $i_0 \in \mathrm{Supp}(M)$, von dem kein Pfeil in ein $j \in \mathrm{Supp}(M)$ weggeht.

Doch dann ist $S(i) \subseteq M$ ein Teilmodul. Ist M nun einfach, so $S(i) \simeq M$.

Zudem ist für $i \neq j$ stets $S(i) \not\simeq S(j)$, da $\mathrm{Hom}(S(i), S(j)) = 0$. □

Bemerkung Der Beweis zeigt zudem: Für ein beliebiges $M \in kQ\text{-}\mathtt{Rep}$ mit $M \neq 0$ gibt es ein $i \in Q_0$ mit $S(i) \subseteq M$ als Teilmodul. Ist nun $M/S(i) \neq 0$, so gibt es ein $j \in Q_0$ mit $S(j) \subseteq M/S(i)$ usw.

Ist $\dim M < \infty$, so bricht dies irgendwann ab, d.h. M ist auf diese Weise “zusammengesetzt” aus einfachen Moduln. Sei $\underline{\dim}\, M = (\dim M(i))_{i \in Q_0}$ der Dimensionsvektor von M. Dann kommt in dieser Reihe $S(i)$ genau $\dim M(i)$-mal vor.

Beispiele

- Sei $Q = \left(1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2\right)$ der Kroneckerköcher. Für verschiedene $\lambda \in k$ erhalten wir zueinander nicht isomorphe unzerlegbare Darstellungen durch

  $$M(\lambda) := \left(k \overset{1}{\underset{\lambda}{\rightrightarrows}} k\right)$$

  Dann ist $S(2) \subseteq M(\lambda)$ ein Teilmodul und es gilt $M/S(2) \simeq \left(k \rightrightarrows 0\right) = S(1)$. Dabei kommt λ nicht vor, d.h. die einfachen Bausteine $S(1)$ und $S(2)$ allein bestimmen $M(\lambda)$ nicht.

- Sei $Q = \left(1 \circlearrowleft \alpha\right)$ der Köcher mit einem Punkt und einem Pfeil.

  Dann ist für jedes $\lambda \in k$ ein einfacher Modul gegeben durch $S(\lambda) = \left(k \circlearrowleft \lambda\right)$.

  Dabei ist $S(\lambda) \simeq S(\mu)$ genau dann, wenn $\lambda = \mu$, denn ein Isomorphismus $S(\lambda) \to S(\mu)$ ist gegeben durch ein $0 \neq a \in k$, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\lambda} & k \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ k & \xrightarrow[\mu]{} & k. \end{array}$$

3 Einfache Moduln und Radikale

Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra.

3.1 Proposition

(a) *Sei S ein einfacher A-Linksmodul. Dann existiert ein surjektiver Modulhomomorphismus $\varphi\colon {}_AA \to {}_AS$.*

(b) *Sei $\varphi\colon {}_AA \to {}_AS$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Dann ist* $\operatorname{Kern}(\varphi)$ *ein maximales Linksideal in A.*

(c) *Sei ${}_AI \subseteq {}_AA$ ein maximales Linksideal. Dann ist $S = A/I$ ein einfacher A-Modul.*

Beweis. Zu (a): Nach Proposition 1.19 ist $\operatorname{Hom}_A(A, S) \simeq S$. Wähle $0 \neq x \in S$ und definiere einen Modulhomomorphismus $f\colon A \to S$ durch $1 \mapsto x$.

Dann ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq S$ ein Teilmodul mit $\operatorname{Im}(f) \neq 0$. Da S einfach, ist also $\operatorname{Im}(f) = S$ und f ist surjektiv.

Zu (b): Sei $\varphi\colon A \to S$ surjektiv. Sei ${}_AI = \operatorname{Kern}(\varphi) \subsetneq {}_AX \subseteq {}_AA$. Es ist $\varphi({}_AX) \subseteq {}_AS$ ein Teilmodul, also ist wegen S einfach

$$\varphi({}_AX) = \begin{cases} 0, & \text{oder} \\ S \simeq \varphi(A). \end{cases}$$

Allerdings impliziert $\varphi(X) = 0$ stets $X \subseteq I = \operatorname{Kern}(\varphi)$, doch ist $I \subsetneq X$ nach Voraussetzung. Also ist $\varphi(X) = S$. Doch dann ergibt sich

$$A/X \simeq (A/\operatorname{Kern}(\varphi))/(X/\operatorname{Kern}(\varphi)) \simeq \operatorname{Im}(\varphi)/\varphi(X) \simeq S/S \simeq 0,$$

also $A = X$.

Zu (c): Sei ${}_AI \subseteq {}_AA$ ein maximales Linksideal. Sei ${}_AS := {}_AA/{}_AI$ und sei $\varphi\colon A \to S,\ a \mapsto a + I$ die Quotientenabbildung.

Zeige: S ist einfach. Sei $0 \subseteq {}_AX \subseteq {}_AS$. Da φ surjektiv, folgt

$$I = \operatorname{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subseteq \varphi^{-1}(X) \subseteq \varphi^{-1}(S) = A.$$

Da nun I maximal in A ist, folgt $\varphi^{-1}(X) = I$ oder $\varphi^{-1}(X) = A$. Also ist

$$X = \varphi(\varphi^{-1}(X)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi^{-1}(X) = I \\ S & \text{falls } \varphi^{-1}(X) = A. \end{cases}$$

Damit ist S einfach. $\square$

3.2 Theorem (Schurs Lemma) 21.11.2016

(a) *Sei ${}_AS$ ein einfacher A-Modul. Dann ist* $\operatorname{End}_A(S)$ *ein Schiefkörper (d.h. jedes $0 \neq \varphi\colon S \to S$ ist invertierbar).*

(b) *Seien ${}_AS$ und ${}_AT$ einfach. Dann gilt:* $\operatorname{Hom}_A({}_AS, {}_AT) \neq 0 \Leftrightarrow S \simeq T$.

Beweis. Zu (a): Sei $\varphi\colon S \to S$ ein Linksmodulhomomorphismus. Es sind $\mathrm{Im}(\varphi)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi)$ Teilmoduln von S, d.h.

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \varphi = 0 \\ S & \Rightarrow \varphi \text{ ist surjektiv} \end{cases} \qquad \mathrm{Kern}(\varphi) = \begin{cases} S & \Rightarrow \varphi = 0 \\ 0 & \Rightarrow \varphi \text{ ist injektiv} \end{cases}.$$

Damit ist $\varphi = 0$ oder φ ist bijektiv, also invertierbar.

Zu (b): Ist $S \simeq T$, so ist wegen $S \neq 0$ stets $\mathrm{Hom}_A(S,T) \neq 0$. Ist dagegen $\mathrm{Hom}_A(S,T) \neq 0$, so gibt es $0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_A(S,T)$. Nach (a) ist dies aber ein Isomorphismus, also $S \simeq T$. $\square$

Beispiel Sei $A = kQ$ eine Wegealgebra eines Köchers Q mit $\dim_k A < \infty$.

Nach Proposition 2.4 sind die einfachen kQ-Moduln gegeben durch $S(j)$ für $j \in Q_0$, wobei $S(j)$ ein k an j und 0 sonst stehen hat.

Weiterhin ist $A = \bigoplus_{j\in Q_0} e_j A$, wobei $e_j = e_j^2$ der Weg der Länge 0 ab j ist. Dann ist eine Basis von $e_j A$ gegeben durch alle Wege, die in j starten.

Nun definiere einen surjektiven A-Modulhomomorphismus auf diesen Basiselementen durch

$$\varphi_j\colon e_j A \to S(j),\ e_j \mapsto x \neq 0,\ e_j \neq \alpha \mapsto 0.$$

Indem wir alle Basiselemente aus $\bigoplus_{j\neq i\in Q_0} e_i A$ auf 0 abbilden, setzen wir φ_j zu einem surjektiven A-Modulhomomorphismus $\hat{\varphi}_j\colon A \to S(j)$ fort.

Sei nun $A_{\geq 1} := \langle \text{Wege der Länge} \geq 1 \rangle_k$ der k-lineare Aufspann der Wege von Länge größer gleich 1 in A. Dann ist der Kern von $\hat{\varphi}_j$

$$\mathrm{Kern}(\hat{\varphi}_j) = e_j A_{\geq 1} \oplus \bigoplus_{j\neq i\in Q_0} e_i A.$$

Nach Proposition 3.1 ist dies ein maximales Rechtsideal in A. Nun definiere den A-Modulhomomorphismus

$$\varphi := (\varphi_i)_{i\in Q_0}\colon A = \bigoplus_{i\in Q_0} e_i A \to \bigoplus_{i\in Q_0} S(i).$$

Dann ist auch φ surjektiv mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = A_{\geq 1}$. Zudem ist

$$A/A_{\geq 1} \simeq \bigoplus_{i\in Q_0} S(i)$$

und

$$A_{\geq 1} = \bigcap_{j\in Q_0} \Big(e_j A_{\geq 1} \oplus \bigoplus_{j\neq i\in Q_0} e_i A \Big)$$

ist ein Schnitt von (gewissen) maximalen Rechtsidealen.

3.3 Definition Sei A eine (endlichdimensionale) Algebra. Das *Jacobson-Radikal* von A ist der Durchschnitt aller maximalen Linksideale von A.

$$\mathrm{rad}(A) := \bigcap_{\substack{{}_A I \subseteq_A A \\ \text{maximales} \\ \text{Linksideal}}} {}_A I$$

Diese Definition funktioniert allgemein für Ringe, also $\mathbf{Z}$-Algebren. Mit dem Lemma von Zorn lässt sich die Existenz maximaler Linksideale zeigen.

Beispiele

- Sei $A = \mathbf{Z}$ als $\mathbf{Z}$-Algebra. Dann ist

  $$\mathrm{rad}(\mathbf{Z}) = \bigcap_{p \text{ prim}} (p\mathbf{Z}) = (0),$$

  insbesondere sind die einfachen $\mathbf{Z}$-Moduln gegeben durch $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

- Sei $A = k$ als k-Algebra. Dann gibt es keine echten Ideale ungleich (0) in A, also ist (0) ein maximales Ideal und es ist $\operatorname{rad}(A) = (0)$.

  Insbesondere ist $A/\operatorname{rad}(A) = k$ einfach.

3.4 Proposition *Für $a \in A$ sind äquivalent.*

(1) Es ist $a \in \operatorname{rad}(A)$.

(2) Es liegt a im Schnitt aller maximalen Rechtsideale, also

$$a \in \bigcap_{\substack{I_A \subseteq A_A \\ \textit{maximales} \\ \textit{Rechtsideal}}} I_A.$$

(3) Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $(1 - ab)c = c(1 - ab) = 1$.

(4) Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $(1 - ba)c = c(1 - ba) = 1$.

(5) Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $(1 - ab)c = 1$.

(6) Für alle $b \in A$ gibt es ein $c \in A$ mit $c(1 - ba) = 1$.

3.5 Korollar

(a) *Es ist*

$$\operatorname{rad}(A) = \bigcap_{\substack{{}_A I \subseteq {}_A A \\ \textit{maximales} \\ \textit{Linksideal}}} {}_A I = \bigcap_{\substack{I_A \subseteq A_A \\ \textit{maximales} \\ \textit{Rechtsideal}}} I_A.$$

(b) *Es ist* $\operatorname{rad}(A)$ *ein zweiseitiges Ideal in A. Insbesondere ist $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ eine k-Algebra.*

Beweis von Proposition 3.4. Wir zeigen (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (5). Analog ist dann auch (1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (6). Danach zeige (3) $\Leftrightarrow$ (4).

Zu (2) $\Rightarrow$ (5): Sei a im Schnitt aller maximalen Rechtsideale. Sei $b \in A$. Zeige: $1 - ab$ hat ein Rechtsinverses, d.h. $c \in A$ mit $(1 - ab)c = 1$.

Angenommen, $1 - ab$ habe kein Rechtsinverses. Dann ist $J_A := (1 - ab)A \subsetneq A$ ein echtes Rechtsideal. Also gibt es ein maximales Rechtsideal $I_A \supseteq J_A$. Allerdings liegt a im Schnitt aller maximalen Rechtsideale, also insbesondere $a \in I_A$, somit $a \in J_A$. Damit ist auch $ab \in J_A$. Nach Definition ist $1 - ab \in J_A$, aber dann $ab + (1 - ab) = 1 \in J_A$, also $J_A = A$, *Widerspruch.*

Zu (5) $\Rightarrow$ (2): Sei $a \in A$ mit (5). Zeige: a ist im Schnitt aller maximalen Rechtsideale.

Angenommen, es gibt es maximales Rechtsideal I_A mit $a \notin I_A$. Dann ist $I_A \subsetneq I_A + aA$, also $I_A + aA = A$. Also gibt es $x \in I_A$ und $y \in A$ mit $1 = x + ay$. Doch dann hat $x = 1 - ay \in I_A$ ein Rechtsinverses (wähle $b = y$), also ist $I_A = A$, *Widerspruch.*

Zu (3) $\Rightarrow$ (5): Dies ist offensichtlich.

Zu (5) $\Rightarrow$ (3): Sei $a \in A$, sodass $1 - ab$ für alle $b \in A$ ein Rechtsinverses $c \in A$ besitzt. Zeige: Dann ist auch $c(1 - ab) = 1$.

Sei also $b \in A$. Dann gibt es $c \in A$, sodass $(1 - ab)c = c - abc = 0$. Sei $d := (-bc)$. Dann ist $c = 1 - ad$. Nach (5) gibt es $e \in A$ mit $(1 - ad)e = 1$, also $ce = 1$.

Doch dann ist $e - ade = 1$, also $e = 1 + ade = 1 - abce = 1 - ab$, also $c(1 - ab) = 1$.

Zu (3) $\Rightarrow$ (4): Sei $a \in A$ mit $b, c \in A$, sodass $c(1 - ab) = (1 - ab)c = 1$. Zeige: Dann hat auch $(1 - ba)$ ein Inverses.

Es ist $(1 - ab)c = c - abc = 1$, also

$$(1 - ba)(1 + bca) = 1 + bca - ba - babca = 1 - ba + b(c - abc)a = 1 - ba + ba = 1$$

und $c(1-ab) = c - cab = 1$, also

$$(1+bca)(1-ba) = 1 + bca - ba - bcaba = 1 - ba + b(c - cab)a = 1 - ba + ba = 1.$$

Der Beweis zu (4) $\Rightarrow$ (3) ist analog. $\square$

Beispiel Sei $e = e^2 \in A$ mit $e \neq 0, 1$ ein Idempotent. Behauptung: $e \notin \operatorname{rad}(A)$.

Es ist auch $1 - e$ ein Idempotent: $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - 2e + e = 1 + e$.

Also ist $A_A = eA \oplus (1-e)A$, denn $e + (1-e) = 1$, $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$.

Falls $e \in \operatorname{rad}(A)$, wähle $a = e$ und $b = e$, dann ist $ab = e^2 = e$.

Nach Proposition 3.4 ist also $1 - ab = 1 - e$ invertierbar. Also gibt es $c \in A$ mit $(1-e)c = 1$, also $e = e \cdot 1 = e(1-e)c = 0 \cdot c = 0$, *Widerspruch.*

3.6 Korollar

(a) *Für* $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ *gilt* $\operatorname{rad}(\bar{A}) = 0$.

(b) *Sei* $I \subsetneq A$ *ein echtes zweiseitiges Ideal, welches nilpotent ist, d.h. es gelte* $I^n = (0)$ *für eine natürliche Zahl* $n \in \mathbf{N}$.

Dann ist $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$.

Beweis. *Zu* (a): *Angenommen*, es gibt ein $\bar{a}$ mit $0 \neq \operatorname{rad}(\bar{A}) \ni \bar{a} \neq 0$, sodass $a \in A$ mit $a \notin \operatorname{rad}(A)$, 23.11.2016
wobei $\bar{a}$ das Bild von a unter der Quotientenabbildung $A \twoheadrightarrow \bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ ist.

Nach Proposition 3.4 gibt es ein $b \in A$, sodass $(1-ab)$ kein Linksinverses hat. Also ist $A(1-ab) \neq A$, daher ist $A(1-ab)$ ein echtes Ideal in A, also enthalten in einem maximalen Linksideal $I \subseteq A$. Sei $\bar{I} = I/\operatorname{rad}(A)$. Dann ist $\bar{A}$ ein Ideal in $\bar{A}$. Zudem ist

$$\underbrace{A/I}_{\text{einfach}} \simeq (A/\operatorname{rad}(A))/(I/\operatorname{rad}(A)) = \bar{A}/\bar{I}.$$

Es ist $1 - ab \in I$, also unter $A \twoheadrightarrow \bar{A}$ auch $\bar{1} - \bar{a}\bar{b} \in \bar{I}$. Da $\bar{I} \neq \bar{A}$, hat $\bar{1} - \bar{a}\bar{b}$ kein Linksinverses, doch dann liegt $\bar{a}$ nicht im Radikal von $\bar{A}$, also $\bar{a} \notin \operatorname{rad}(\bar{A})$, *Widerspruch.*

Zu (b): Sei I nilpotent. Dann gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ mit $I^n = (0)$. Seien $a \in I$ und $b \in A$. Zeige: $1 - ab$ hat ein Inverses. Es ist $x := ab \in I$ mit $x^n = 0$ und

$$(1-x)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} - x - \ldots - x^{n-1} - x^n = 1.$$

Also hat $1 - ab = 1 - x$ ein Inverses, also ist $a \in \operatorname{rad}(A)$. Daher ist $I \subseteq \operatorname{rad}(A)$. $\square$

3.7 Definition Sei M ein A-Linksmodul. Der *Annullator* $\operatorname{Ann}_A(M)$ von M ist

$$\operatorname{Ann}_A(M) := \{a \in A : am = 0 \text{ für alle } m \in M\}.$$

3.8 Lemma *Es ist* $\operatorname{Ann}_A(M)$ *ein zweiseitiges Ideal von* A.

Beweis. Seien $a \in \operatorname{Ann}_A(M)$ und $b \in A$. Zeige: $ba \in \operatorname{Ann}_A(M)$ und $ab \in \operatorname{Ann}_A(M)$.

Sei $m \in M$. Es ist $(ba)m = b\underbrace{(am)}_{=0} = 0$ und $(ab)m = a\underbrace{(bm)}_{\in M} = 0$. $\square$

Beispiel Sei ${}_AI$ ein Linksideal in A und $M := A/I$ als A-Linksmodul. Was ist $\operatorname{Ann}_A(A/I)$?

Sei $x \in I$ und $y + I \in A/I$. Dann ist $x(y+I) = xy + I = 0 + X \Leftrightarrow xy \in I$.

Allerdings ist I ein Linksideal, d.h. xy muss nicht in I liegen, d.h. es ist $I \nsubseteq \operatorname{Ann}_A(A/I)$ im Allgemeinen. Falls I ein zweiseitiges Ideal ist, so gilt hingegen $I \subseteq \operatorname{Ann}_A(A/I)$.

Beispiel Sei $A = \mathrm{M}_n(k)$ und betrachte das Linksideal

$$I = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \subseteq A.$$

Dann ist

$$A/I = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

ein treuer A-Modul, daher ist $\mathrm{Ann}_A(A/I) = \{0\}$.

3.9 Proposition *Sei $a \in A$. Dann gilt $a \in \mathrm{rad}(A)$ genau dann, wenn $a \in \mathrm{Ann}_A(S)$ für jeden einfachen A-Linksmodul S. Also gilt*

$$\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{{}_AS \text{ einfach}} \mathrm{Ann}_A(S).$$

Damit folgt wieder, dass $\mathrm{rad}(A)$ ein zweiseitiges Ideal von A ist.

Beweis. Sei $a \in \mathrm{rad}(A)$ und ${}_AS$ einfach. Sei $x \in S$ mit $x \neq 0$. Zeige: $ax = 0$, d.h. $A(ax) = \{0\}$.

Es ist $A(ax)$ ein Teilmodul von S einfach. Ist also $A(ax) = \{0\}$, so sind wir fertig.

Angenommen, es ist $A(ax) = S$. Dann gibt es ein $b \in A$ mit $x = bax$, d.h. $(1 - ba)x = 0$. Da $a \in \mathrm{rad}(A)$ gibt es $c \in A$ mit $c(1 - ba) = 1$, also

$$0 = c0 = c(1 - ba)x = 1x = x,$$

im *Widerspruch* zu $x \neq 0$. Also ist $A(ax) = 0$.

Umgekehrt, sei a im Schnitt aller Annulatoren von einfachen Linksmoduln. Zeige: $a \in \mathrm{rad}(A)$, d.h. a ist im Schnitt aller maximalen Linksideale.

Angenommen, es gibt ein maximales Linksideal ${}_AI \subseteq {}_AA$ mit $a \notin I$. Es ist aber ${}_AS = A/I$ einfach, daher $a \in \mathrm{Ann}_A(S)$. Also ist $ax = 0$ für alle $x \in A/I = S$.

Insbesondere ist also $a(1 + I) = a + I = 0$, also $a \in I$, im *Widerspruch* zu $a \notin I$. □

3.10 Definition Sei M ein A-Linksmodul. Das *Radikal* von M, bezeichnet mit $\mathrm{rad}(M)$, ist der Durchschnitt aller maximalen Teilmoduln von M

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{\substack{N \subsetneq M \\ \text{maximal}}} N.$$

3.11 Proposition *Es ist*

$$\mathrm{rad}(M) = \bigcap_{\substack{p\colon M \to S \\ S \text{ einfach}}} \mathrm{Kern}(p).$$

Beweis. Es ist $N \subsetneq M$ maximal genau dann, wenn M/N einfach ist. □

Beispiele

- Ist M einfach, so gilt $\mathrm{rad}(M) = \{0\}$.
- Ist $M = S_1 \oplus S_2$ mit S_1, S_2 einfach. Dann ist mit den Projektionen auf die beiden Summanden

  $$S_1 = \mathrm{Kern}(p_2\colon M \twoheadrightarrow S_2) \quad \text{und} \quad S_2 = \mathrm{Kern}(p_1\colon M \twoheadrightarrow S_1).$$

  Also ist $\mathrm{rad}\, M \subseteq S_1 \cap S_2 = \{0\}$, also $\mathrm{rad}\, M = \{0\}$.

3.12 Theorem

(a) *Sei $M \in A$-$\texttt{mod}$. Dann ist* $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$ *genau dann, wenn M halbeinfach ist, d.h. es gibt eine Zerlegung $M \simeq S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ für $S_1, \ldots, S_n$ einfach, eventuell mit Wiederholung.*

(b) *Es ist ${}_A\bar{A} = {}_A(A/\operatorname{rad}(A))$ halbeinfach und jeder einfache A-Modul ${}_AS$ ist isomorph zu einem direkten Summanden von ${}_A\bar{A}$.*

(c) *Bis auf Isomorphie gibt es nur endlich viele einfache A-Moduln.*

Beispiel Sei $A = kQ$ eine Wegealgebra mit $\dim_k kQ < \infty$. Sei $Q_0 = \{1, \ldots n\}$. Dann ist $A/A_{\geq 1} \simeq S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$.

Da $A_{\geq 1}$ nilpotent ist, folgt mit Korollar 3.6, dass $A_{\geq 1} \subseteq \operatorname{rad}(A)$ gilt.

Nach Theorem 3.12 enthält $A/\operatorname{rad}(A) = \bar{A}$ stets $S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ als direkten Summanden. Damit folgt aber $\operatorname{rad}(A) \subseteq A_{\geq 1}$, also ist
$$\operatorname{rad}(A) = A_{\geq 1}.$$

Beweis von Theorem 3.12. Zu (a): Sei ${}_AM$ ein Linksmodul mit $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$.

Zeige: $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ für einfache Moduln $S_1, \ldots, S_n$. Da $\dim M < \infty$, hat M einfache Teilmoduln. Zeige also: Die einfachen Teilmoduln von M sind direkte Summanden.

Dazu sei $S_1 \subseteq M$ einfach. Da $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$ ist $S_1 \nsubseteq \operatorname{rad}(M)$. Also existiert ein $p\colon M \to T$ mit $p \neq 0$ und T einfach, sodass $S_1 \nsubseteq \operatorname{Kern}(p)$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, hook, "i=\text{incl.}"] \arrow[rr, bend right, "ip\neq 0"'] & M \arrow[r, "p"] & T \end{tikzcd}$$

Nach Schurs Lemma (Theorem 3.2) ist $ip\colon S_1 \to T$ also ein Isomorphismus.

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, hook, "i=\text{incl.}"] \arrow[rr, bend right, "\text{id}"'] & M \arrow[r, "p'=p(ip)^{-1}"] & S_1 \end{tikzcd}$$

Damit ist $M = S_1 \oplus \operatorname{Kern}(p')$. Ist nun $\operatorname{Kern}(p') = \{0\}$, so sind wir fertig. Ist $\operatorname{Kern}(p') \neq \{0\}$, so wähle einfachen Modul $S_2 \subseteq \operatorname{Kern}(p')$ wie oben, usw. Da $\dim_k M < \infty$, folgt damit, dass M halbeinfach ist.

Sei umgekehrt M halbeinfach mit $M = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ und $S_1, \ldots, S_n$ einfach. Dann ist aber
$$\operatorname{rad}(M) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Kern}(p_i\colon S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \twoheadrightarrow S_i) = \{0\},$$
also $\operatorname{rad}(M) = \{0\}$.

Zu (b): Sei $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ und ${}_AS$ einfach. Da $\operatorname{rad}(A) \subseteq \operatorname{Ann}_A(S)$ ist S auch ein einfacher $\bar{A}$-Modul. Umgekehrt ist jeder $\bar{A}$-Modul auch ein A-Modul, also sind die einfachen A-Moduln genau die einfachen $\bar{A}$-Moduln.

Nach Korollar 3.6 ist $\operatorname{rad}(\bar{A}) = 0$, also gibt es nach (a) eine Zerlegung $\bar{A} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ in einfache Moduln S_i.

Ist nun T einfach, so gibt es eine surjektive Abbildung $\bar{A} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \twoheadrightarrow T$. Doch dann gibt es ein i, sodass sich die Abbildung einschränkt zu einer Abbildung $S_i \to T$ ungleich 0, welche nach Schurs Lemma ein Isomorphismus ist.

Zu (c): Folgt unmittelbar aus (b), da $\dim \bar{A} < \infty$. □

3.13 Lemma *Für $X, Y \in A$-$\texttt{mod}$ gilt* 28.11.2016
$$\operatorname{rad}(X \oplus Y) = \operatorname{rad}(X) \oplus \operatorname{rad}(Y).$$

Beweis. Sei $p\colon X \oplus Y \to S$ einfach mit $p \neq 0$. Schreibe $p = (p_1, p_2)$ mit $p_1\colon X \to S$ und $p_2\colon Y \to S$.

Dann ist $\operatorname{Kern}(p_1) \subseteq X$ ein maximaler Teilmodul von X und $\operatorname{Kern}(p_2) \subseteq Y$ ein maximaler Teilmodul von Y. Also ist $\operatorname{rad}(X) \subseteq \operatorname{Kern}(p_1)$ und $\operatorname{rad}(Y) \subseteq \operatorname{Kern}(p_2)$, also gilt

$$\operatorname{rad}(X \oplus Y) = \bigcap_{p\colon X\oplus Y \to S} \operatorname{Kern}(p) \supseteq \bigcap_{p\colon X\oplus Y \to S} \operatorname{Kern}(p_1) \oplus \operatorname{Kern}(p_2) \supseteq \operatorname{rad}(X) \oplus \operatorname{rad}(Y).$$

Für die Gegenrichtung sei $p\colon X \to S$ mit $p \neq 0$ und S einfach. Dann ist $(p, 0)\colon X \oplus Y \to S$ auch ein A-Modulhomomorphismus, also ist $\operatorname{rad}(X) \oplus Y \supseteq \operatorname{rad}(X \oplus Y)$. Analog erhalten wir $X \oplus \operatorname{rad}(Y) \supseteq \operatorname{rad}(X \oplus Y)$. Also ist

$$\operatorname{rad}(X) \oplus \operatorname{rad}(Y) = ((\operatorname{rad}(X) \oplus Y) \cap (X \oplus \operatorname{rad}(Y))) \supseteq \operatorname{rad}(X \oplus Y). \qquad \square$$

3.14 Lemma *Sei $f \in \operatorname{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Dann gilt*

$$f(\operatorname{rad}(X)) \subseteq \operatorname{rad}(Y).$$

Beweis. Sei $u \in \operatorname{rad}(X)$. Zeige: $f(u) \in \operatorname{rad}(Y)$.

Sei $p\colon Y \to S$ mit $p \neq 0$ und S einfach. Dann ist $q = fp\colon X \to S$. Da $u \in \operatorname{rad}(X)$, ist $q(u) = p(f(u)) = 0$, also ist $f(u) \in \operatorname{Kern}(p)$, daher $f(u) \in \operatorname{rad}(X)$. $\square$

Bemerkung Nach Lemma 3.14 induziert jeder Homomorphismus $f\colon X \to Y$ einen Homomorphismus $\bar{f}\colon X/\operatorname{rad}(X) \to Y/\operatorname{rad}(Y)$.

3.15 Lemma *Sei $X \in A$-$\texttt{mod}$. Dann ist $X/\operatorname{rad}(X)$ halbeinfach.*

Beweis. Nach Proposition 1.19 ist $\operatorname{Hom}_A({}_AA, {}_AX) \simeq {}_AX$. Durch Wahl von Erzeugern von X erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $f\colon A^n \twoheadrightarrow X$.

Dieser induziert einen Homomorphismus $\bar{f}\colon A^n/\operatorname{rad}(A^n) \twoheadrightarrow X/\operatorname{rad}(X)$. Nach Lemma 3.13 ist $A^n/\operatorname{rad}(A^n) \simeq (A/\operatorname{rad}(A))^n = \bar{A}^n$. Nach Theorem 3.12 ist ${}_A\bar{A}$ als Modul halbeinfach, daher ist $\bar{A} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_\ell$ mit einfachen Moduln S_i. Sei nun S einfach mit $X/\operatorname{rad}(X) \twoheadrightarrow S$. Dies gibt einen surjektiven Homomorphismus

$$S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \oplus S_1 \oplus \ldots \oplus S_n \oplus \ldots \twoheadrightarrow X/\operatorname{rad}(X) \twoheadrightarrow S.$$

Dann gibt es aber ein i mit $S_i \xrightarrow{\neq 0} S$. Nach Schurs Lemma ist dies aber ein Isomorphismus $S_i \to S$, daher ist S_i ein direkter Summand von $X/\operatorname{rad}(X)$. Da $X \in A$-$\texttt{mod}$ folgt die Aussage nun per Induktion. $\square$

3.16 Theorem (Nakayamas Lemma) *Seien $X, Y, M \in A$-$\texttt{mod}$ und $f \in \operatorname{Hom}_A({}_AX, {}_AY)$. Dann gilt*

(a) *Es ist $f\colon X \to Y$ surjektiv genau dann, wenn $\bar{f}\colon X/\operatorname{rad}(X) \to Y/\operatorname{rad}(Y)$ surjektiv ist.*

(b) *Es ist $\operatorname{rad}(A) \cdot M = M$ genau dann, wenn $M = \{0\}$ ist.*

Beweis. *Zu* (a): Sei $f\colon X \to Y$ surjektiv. Betrachte das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads, "\text{quot.}"] & Y \arrow[d, two heads, "\text{quot.}"] \\
X/\operatorname{rad}(X) \arrow[r, two heads, "\bar{f}"] & Y/\operatorname{rad}(Y)
\end{tikzcd}$$

Wir erkennnen, dass auch $\bar{f}$ surjektiv ist.

Sei umgekehrt $\bar{f}\colon X/\operatorname{rad}(X) \to Y/\operatorname{rad}(Y)$ surjektiv.

Sei $u \in Y$, sei $\bar{u} \in Y/\operatorname{rad}(Y)$ die Restklasse von u. Dann gibt es ein $v \in X$ mit $\bar{f}(\bar{v}) = \bar{u}$, wobei $\bar{v} \in X/\operatorname{rad}(X)$ die Restklasse von v ist. Damit ist $f(v) \in u \operatorname{rad}(Y)$, also ist $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{rad}(Y) = Y$.

Angenommen, es wäre $\operatorname{Im}(f) \subsetneq Y$. Dann gibt es aber einen maximalen Teilmodul $Z \subsetneq Y$ mit $\operatorname{Im}(f) \subseteq Z \subsetneq Y$, also ist $\operatorname{rad}(Y) \subseteq Z$. Doch dann ist $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{rad} Y) \subseteq Z \subsetneq Y$, *Widerspruch*. Also ist $\operatorname{Im}(f) = Y$.

Zu (b): Sei $M \neq 0$. *Annahme*: $\operatorname{rad}(A) \cdot M = M$.

Nach Voraussetzung ist $\dim M < \infty$. Daher gibt es endlich viele Erzeuger $m_1, \ldots, m_n \in M$. Wähle $n > 0$ minimal.

Sei $m \in M$. Dann gibt es $a_1(m), \ldots, a_n(m) \in A$ mit $m = a_1(m)m_1 + \ldots + a_n(m)m_n$. Nun ist aber auch

$$M = \operatorname{rad}(A) \cdot M = \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} b_j p_j : b_j \in \operatorname{rad}(A), p_j \in M, \ell \in \mathbf{N} \right\},$$

daher erhalten wir, dass

$$m = \sum_{j=1}^{\ell} b_j(m) p_j(m) \text{ wobei } b_j \in \operatorname{rad}(M) \text{ und } M \ni p_j(m) = a_1(p_j)m_1 + \ldots + a_n(p_j)m_n.$$

Somit ist

$$m = \sum_{k=1}^{n} c_k(m) m_k \text{ wobei } c_k(m) \in \operatorname{rad}(A).$$

Nun wähle $m = m_1$. Dann ist $m = 1m_1$, aber auch $m = c_1 m_1 + \ldots + c_n m_n$ mit $c_j \in \operatorname{rad}(A)$. Also ist

$$(1 - c_1)m_1 = c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n.$$

Wegen $c_1 \in \operatorname{rad}(A)$ ist $1 - c_1$ invertierbar, daher

$$m_1 = \frac{1}{1 - c_1}(c_2 m_2 + \ldots + c_n m_n),$$

im *Widerspruch* zur Minimalität von n. □

3.17 Korollar *Es ist* $\operatorname{rad}(A)$ *das eindeutig größte nilpotente Ideal in* A.

Beweis. Nach Korollar 3.6 ist jedes nilpotente Ideal von A enthalten in $\operatorname{rad}(A)$. Es bleibt zu zeigen: $\operatorname{rad}(A)$ ist nilpotent.

Es ist stets $A \supsetneq \operatorname{rad}(A)$. Ist nun $\operatorname{rad}(A) = 0$, so sind wir fertig. Ist $\operatorname{rad}(A) \neq 0$, so gilt mit Theorem 3.16 stets $\operatorname{rad}(A) \supsetneq \operatorname{rad}(A) \cdot \operatorname{rad}(A) = \operatorname{rad}(A)^2$.

Ist nun $\operatorname{rad}(A)^2 = 0$, so sind wir fertig, falls nicht betrachte $\operatorname{rad}(A)^2 \supsetneq \operatorname{rad}(A)^3$ usw. Da $\dim A < \infty$, muss irgendwann $\operatorname{rad}(A)^n = 0$ gelten. □

3.18 Proposition *Sei* $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. *Dann ist* $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(A) \cdot M$.

Beweis. Sei $m \in M$. Dann gibt es $f\colon A \to M$ mit $f(1) = m$. Nach Lemma 3.14 gilt $f(\operatorname{rad}(A)) \subseteq \operatorname{rad}(M)$. Andererseits ist

$$f(\operatorname{rad}(A)) = f(\operatorname{rad}(A) \cdot 1) = \operatorname{rad}(A) \cdot f(1) = \operatorname{rad}(A) \cdot m,$$

also $\operatorname{rad}(A) \cdot M \subseteq \operatorname{rad}(M)$.

Zur Umkehrung: Wegen $\operatorname{rad}(A) \cdot M \subseteq \operatorname{rad}(M)$ gibt es den surjektiven Homomorphismus $M/(\operatorname{rad}(A) \cdot M) \twoheadrightarrow M/\operatorname{rad}(M)$.

Behauptung: $\mathrm{rad}(M/\mathrm{rad}(A)\cdot M) = 0$, d.h. $M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M)$ ist halbeinfach.

Dazu sei S einfach und $0 \neq p\colon M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M) \to S$. Wähle $0 \neq f\colon A \to S$. Sei $0 \neq x \in A$ und wähle $y \in p^{-1}(x)$. Setze $g\colon A \to M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M), 1 \mapsto y$. Dann ist

$$g(\mathrm{rad}(A)) = \mathrm{rad}(A)\cdot g(1) = \mathrm{rad}(A)y \in \mathrm{rad}(A)\cdot M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M) = 0.$$

Also ist $g(\mathrm{rad}(A)) = 0$. Damit gibt es den Homomorphismus $\bar{g}\colon A/\mathrm{rad}(A) \to M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M)$, also auch $\bar{f}\colon A/\mathrm{rad}(A) \to S/(\mathrm{rad}(A)\cdot S) = S$. Da aber $A/\mathrm{rad}(A)$ halbeinfach ist, gibt es ein i mit $0 \neq \bar{f}S_i \to S$, mit Schurs Lemma folgt erneut, dass S_i ein direkter Summand von $M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M)$ ist.

Wegen $\dim M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M) < \infty$ folgt die Behauptung nun per Induktion.

Nun betrachte die Quotientenabbildung $M \twoheadrightarrow M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M)$. Diese hat $\mathrm{rad}(M)$ im Kern, also gibt es die surjektive Abbildung $M/\mathrm{rad}(M) \twoheadrightarrow M/(\mathrm{rad}(A)\cdot M)$. Aus Dimensionsgründen folgt also $\mathrm{rad}(M) = \mathrm{rad}(A)\cdot M$. □

Bemerkung Für $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$ und $\ell \in \mathbf{N}$ schreiben wir 30.11.2016

$$\mathrm{rad}^\ell(M) := \mathrm{rad}(A)^\ell \cdot M.$$

3.19 Korollar *Seien $X, Y \in A\text{-}\mathtt{mod}$.*

(a) *Gilt $X \subseteq Y$, so auch $\mathrm{rad}(X) \subseteq \mathrm{rad}(Y)$.*

(b) *Es gibt ein $n \in \mathbf{N}$ mit $\mathrm{rad}^n(X) = 0$.*

Beweis. Zu (a): Es ist $\mathrm{rad}(X) = \mathrm{rad}(A)\cdot X \subseteq \mathrm{rad}(A)\cdot Y = \mathrm{rad}(Y)$.

Zu (b): Es ist $\mathrm{rad}^n(X) = \mathrm{rad}(A)^n \cdot X$ mit $\mathrm{rad}(A)$ nilpotent nach Korollar 3.17. □

3.20 Definition Eine endlichdimensionale Algebra B heißt *halbeinfach* (als Algebra), genau dann, wenn der reguläre Modul ${}_BB$ halbeinfach ist (als Modul).

3.21 Theorem (Satz von Wedderburn und Artin) *Die halbeinfachen k-Algebren sind, bis auf Isomorphie, genau die Algebren der Form*

$$A \simeq \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{M}_{n_j}(D_j)$$

für $\ell \in \mathbf{N}$, $n_1, \ldots, n_\ell \in \mathbf{N}$ und Schiefkörper $D_1, \ldots, D_\ell$, welche endlichdimensionale Erweiterungen von k sind. Dabei ist die Zerlegung eindeutig bis auf Reihenfolge.

Außerdem hat A bis auf Isomorphie genau ℓ einfache Moduln $S_1, \ldots, S_\ell$, wobei $S_j \simeq D_j^{n_j}$, d.h. es ist $\dim_k S_j = n_j[D_j : k]$, und $D_j = \mathrm{End}_A(S_j)$.

Bemerkung Ist A kommutativ und halbeinfach, so ist $A \simeq \bigoplus_{j=1}^{\ell} k_j$, wobei k_j Körpererweiterungen von k sind (*Satz von Weierstrass und Dedekind*).

Beweis von Theorem 3.21. Algebren der Form $A = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{M}_{n_j}(D_j)$ sind halbeinfach (Übung).

Sei nun A eine Algebra mit $\mathrm{rad}({}_AA) = \{0\}$. Also gibt es einfach Moduln S_i mit ${}_AA \simeq S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, ordnen wir diese nach Isomorphieklassen ergibt sich

$${}_AA \simeq S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell}.$$

Berechne nun die Algebra A als $\mathrm{End}_A(A) = \mathrm{Hom}_A(S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell}, S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell})$.

nach Schurs Lemma (Theorem 3.2) gilt $\mathrm{Hom}(S_j, S_k) = 0$ für $j \neq k$, daher ist schließlich $\mathrm{End}({}_AA) \simeq \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{End}_A(S_j^{n_j}) \simeq \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{M}_{n_j}(D_j)$, wobei $D_j = \mathrm{End}_A(S_j)$ ein Schiefkörper ist nach Theorem 3.2.

Noch zu zeigen ist die Eindeutigkeit der Zerlegung. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Zerlegung eines halbeinfachen Moduls in einfache Moduln (bis auf Reihenfolge) eindeutig ist.

Sei $S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell} \simeq T_1^{p_1} \oplus \ldots \oplus T_m^{p_m}$ zwei Zerlegungen in einfache Moduln. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_A(S_1, S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell}) \simeq \mathrm{Hom}_A(S_1, T_1^{p_1} \oplus \ldots \oplus T_m^{p_m}). \tag{$*$}$$

Nach Schurs Lemma ist die linke Seite isomorph zu $\mathrm{Hom}_A(S_1, S_1^n) \simeq \mathrm{Hom}_A(S_1, S_1)^n = D_1^n$.

Weiterhin gibt Schurs Lemma für die rechte Seite $\mathrm{Hom}(S_1, T_j) = 0$ außer für ein j, ohne Einschränkung sei $\mathrm{Hom}(S_1, T_1) \neq 0$. Außerdem gilt $S_1 \simeq T_1$, daher gilt $\mathrm{Hom}(S_1, T_1) \simeq \mathrm{End}_A(S_1) = D_1$. Dann ist die rechte Seite in $(*)$ isomorph zu $\mathrm{Hom}(S_1, T_1^{p_1}) \simeq \mathrm{Hom}(S_1, T_1)^{p_1} \simeq D_1^{p_1}$.

Es folgt $p_1 = n_1$. Induktiv folgt außerdem $\ell = m$ und nach Umsortierung $n_i = p_i$ für alle i, d.h. die Zerlegung ist bis auf Reihenfolge eindeutig. $\square$

4 Kategorien und Funktoren

4.1 Definition Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ von *Objekten*, einer Klasse $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ von *Morphismen* (hier sind $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$ disjunkt), wobei jeder Morphismus $f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ zu einem geordneten Paar (X, Y) von Objekten gehört, wir schreiben $f\colon X \to Y$. Alle Morphismen der Form $f\colon X \to Y$ bilden die Menge (dies ist eine Voraussetzung!) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Weiterhin ist eine partielle Verknüpfung, genannt *Komposition*, $\operatorname{Mor}\mathcal{C} \times \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}$ gegeben, die definiert ist für $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$. Wir schreiben für $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ dann $fg\colon X \to Z$ für die Komposition dieser beiden Morphismen.

Diese Daten erfüllen die folgenden Eigenschaften.

- Die Komposition ist assoziativ, d.h. es gilt $(fg)h = f(gh)$ für $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ und $h\colon Z \to W$ in $\mathcal{C}$.
- Für alle Objekte $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es einen Morphismus $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, genannt *Identität* auf X, welcher $1_X f = f$ und $g 1_X = g$ für alle $f\colon X \to Y$ und $g\colon W \to X$ ni $\mathcal{C}$ erfüllt.

Bemerkung Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

- Objekte müssen keine Mengen sein, genauso wenig muss die Klasse von Objekten eine Menge sein (siehe Beispiele weiter unten).
- Der Fall $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \emptyset$ für $X \neq Y$ ist möglich.
- Die Identität 1_X ist eindeutig: Sei auch $1'_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ eine Identität. Dann gilt $1_X = 1'_X 1_X = 1'_X$.

Beispiele

- Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C} = \texttt{Set}$ der Mengen mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ als Klasse (dies ist eine echte Klasse) aller Mengen und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Menge aller Mengenabbildungen von X nach Y.

  Die Komposition ist die übliche Hintereinanderausführung von Abbildungen und die Identität ist die übliche identische Abbildung.
- Sei A ein Ring. Dann ist $\mathcal{C} = A\text{-}\texttt{Mod}$ die Kategorie der A-Moduln mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ als Klasse aller A-Linksmoduln und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Menge aller A-Linksmodulhomomorphismen von X nach Y.
- Ebenso erhalten wir die Kategorie $\mathcal{C} = \texttt{Group}$ der Gruppen, wobei die Objektklasse alle Gruppen enthält und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ die Menge aller Gruppenhomomorphismen von X nach Y ist.
- Sei G eine Gruppe. Dann ist eine Kategorie gegeben durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{G\}$, d.h. $\mathcal{C}$ hat nur ein Objekt und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(G, G) = G$. Die Komposition ist dann die Multiplikation in G und die Identität auf G ist das neutrale Element in G.
- Sei $\mathcal{C} = Q$ ein Köcher. Dann ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = Q_0$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ als Menge aller Wege der Länge ≥ 0 von X nach Y. Die Komposition ist die Verkettung von Wegen, die Identität auf X ist der Weg der Länge der 0 auf X.

Zum Beispiel ist für den Köcher

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
& 2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \\
3 \arrow[ur, "\gamma"] & &
\end{tikzcd}$$

nun $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{1,2,3,4\}$ und zum Beispiel $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(1,1) = \{e_1\}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(1,4) = \{\alpha\beta\}$, aber $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(4,1) = \emptyset$.

- Sei $\mathcal{C} = \mathtt{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume, d.h. die Objektklasse enthält alle topologischen Räume und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ enthält alle stetigen Abbildungen von X nach Y.
- Sei X ein topologischer Raum. Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}$ durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = X$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2)$ als Menge aller Homotopieklassen von stetigen Wegen in X von x_1 nach x_2.
- Die Kategorie k-$\mathtt{Vect}$ der k-Vektorräume über einem Körper k mit linearen Abbildungen 05.12.2016
  als Morphismen.

  Für eine k-Algebra A erhalten wir die Teilkategorie A-$\mathtt{Mod} \subseteq k$-$\mathtt{Vect}$ der A-Moduln mit A-Modulhomomorphismen als Morphismen. Hierbei heiße eine Kategorie $\mathcal{C}'$ *Teilkategorie* einer Kategorie $\mathcal{C}$, falls $\operatorname{Ob}\mathcal{C}' \subseteq \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$.

  Weiterhin erhalten wir die volle Teilkategorie A-$\mathtt{mod} \subseteq A$-$\mathtt{Mod}$ der endlichdimensionalen A-Moduln mit A-Modulhomomorphismen als Morphismen. Dabei heiße eine Teilkategorie $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ *voll*, falls $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}'}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für alle Objekte $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}'$.
- Wir erhalten eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit topologischen Räumen als Objektklasse und Inklusionen als Morphismen.
- Sei X ein topologischer Raum. Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie mit Teilräumen $Y \subseteq X$ (mit der Teilraumtopologie) als Objektklasse und Inklusionen als Morphismen. Beachte, dass hier jede Hom-Menge höchstens ein Element besitzt.
- Sei $M \in A$-$\mathtt{mod}$ und betrachte die Kategorie $\operatorname{add} M \subseteq A$-$\mathtt{mod}$ als volle Teilkategorie mit Objektklasse gegeben durch direkte Summanden von M^n, d.h. $X \in \operatorname{Ob}(\operatorname{add} M)$ genau dann, wenn $X \mid M^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$.
- Sei $M \in A$-$\mathtt{Mod}$ und betrachte die Kategorie $\operatorname{Add} M \subseteq A$-$\mathtt{Mod}$ als volle Teilkateogire mit Objektklasse gegeben durch direkte Summanden von beliebigen direkten Summen von M, d.h. $X \in \operatorname{Ob}(\operatorname{Add} M)$ genau dann, wenn $X \mid \bigoplus_{i \in I} M$ für eine Indexmenge I.

4.2 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.

- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ heißt *Endomorphismus* von X, schreibe $\operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$.
- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt *Isomorphismus* (kurz *iso*), falls es $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ gibt mit $fg = 1_X$ und $gf = 1_Y$.
- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt *Monomorphismus* (kurz *mono*), falls für $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und beliebige $u, v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ aus $uf = vf$ stets $u = v$ folgt.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

- $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt *Epimorphismus* (kurz *epi*), falls für $Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ und $u, v \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ beliebig aus $fu = fv$ stets $u = v$ folgt.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Beispiele (für Monomorphismen)

- 1_X ist Monomorphismus: $u1_X = v1_X \Rightarrow u = v$.
- Jeder Isomorphismus $f\colon X \to Y$ ist ein Monomorphismus: Sei $g\colon Y \to X$ mit $fg = 1_X$ und $gf = 1_Y$. Dann ist $uf = vf \Rightarrow ufg = vfg \Rightarrow u = v$.
- Sei $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ die Kategorie der Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen.

  Sei Z eine Menge und $u, v\colon Z \to X$ mit $uf = vf$. Falls f injektiv, so gilt für alle $z \in Z$ stets $zuf = zuv \Rightarrow zu = zv$, also $u = v$. Damit:

  $$f \text{ injektiv } \Rightarrow f \text{ mono.}$$

  Ein ähnliches Argument funktioniert für alle Kategorien, bei denen Morphismen Abbildungen zwischen Mengen sind.

  Für die Gegenrichtung: Sei $f\colon X \to Y$ mono. Annahme: f nicht injektiv. Dann gibt es $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, aber $x_1 f = x_2 f$.

  Definiere $Z = \{z\}$. Definiere Abbildungen $u, v\colon Z \to X$ durch $zu = x_1$ und $zv = x_2$. Dann ist $u \neq v$, aber $uf = vf$, im Widerspruch zu f mono.

  Insgesamt gilt also in $\mathtt{Set}$:

  $$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ mono.}$$

- Sei $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$. Dann gilt f injektiv $\Rightarrow f$ mono wie in $\mathtt{Set}$.

  Für die Rückrichtung sei f mono. Annahme: f ist nicht injektiv. Dann ist $Z := \operatorname{Kern}(f) \neq 0$. Sei $u\colon Z \hookrightarrow X$ die Einbettung von Z in X und $0 = v\colon Z \to X$ die Nullabbildung. Dann gilt $u \neq v$ aber $uf = vf$, im Widerspruch zu f mono.

  Insgesamt gilt also in $A\text{-}\mathtt{Mod}$:

  $$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ mono.}$$

- Sei $\mathcal{C} = Q$ ein Köcher, $f\colon X \to Y$ ein Weg zwischen Punkten $X, Y \in Q_0$. Sind $u, v\colon Z \to X$ Wege von Z nach X, so sind uf, vf Wege von Z nach Y.

  Gilt nun $uf = vf$ als Gleichheit von Wegen, so ist $u = v$, also ist jeder Morphismus ein mono (und auch epi), aber nur 1_Z für $Z \in Q_0$ ist ein Isomorphismus.
- Betrachte den Köcher $1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Falls in $\mathcal{C}$ außer 1_X kein Morphismus in X ankommt, so ist jedes in X startende f ein mono.
- Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ mono. Dann ist auch fg mono, denn für $u, v\colon W \to X$ gilt

  $$u(fg) = v(fg) \Rightarrow (uf)g = (vf)g \overset{g \text{ mono}}{\Rightarrow} uf = vf \overset{f \text{ mono}}{\Rightarrow} u = v.$$

- Sei $\mathcal{C}$ gegeben durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{$zusammenhängende topologische Räume mit Basispunkt$\}$ und $\operatorname{Mor}\mathcal{C} = \{$stetige Abbildungen, die Basispunkt auf Basispunkt abbilden$\}$.

  Sei $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$ eine Überlagerung. Dann ist f surjektiv, also epi, aber f ist nicht injektiv. Seien $u, v\colon Z \to X$ mit $uf = vf$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für Hochhebungen aus der Topologie folgt jedoch $u = v$, also ist f ein mono.

  Also: f mono und epi, surjektiv, aber nicht injektiv und kein Isomorphismus.

Beispiele (für Epimorphismen)

- Es sind alle Isomorphismen und alle Identitäten 1_X Epimorphismen.
- Sei $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ die Kategorie der Mengen, $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen Mengen.

  Sei Z eine Menge und $u, v\colon Y \to Z$ mit $fu = fv$. Falls f surjektiv ist, so gibt es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $y = xf$ und damit $xfu = xfv \Rightarrow yu = yv \Rightarrow u = v$. Also gilt

  $$f \text{ surjektiv } \Rightarrow f \text{ epi.}$$

Ein ähnliches Argument funktioniert für alle Kategorien, bei denen Morphismen Abbildungen zwischen Mengen sind.

Für die Gegenrichtung: Sei $f\colon X \to Y$ epi. Annahme: f nicht surjektiv. Dann gibt es ein $y \in Y$ mit $y \notin f(X)$. Setze $Z := \{1,2,3\}$ und definieren $u, v\colon Y \to Z$ durch

$$yu = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in f(X) \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad yv = \begin{cases} 1 & \text{falls } y \in f(X) \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist für alle $x \in X$ stets $xfu = 1$ und $xfv = 1$, also $fu = fv$, aber $yu = 2 \neq 3 = yv$, also $u \neq v$, im Widerspruch zu f epi.

Insgesamt gilt also in `Set`:

$$f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ epi.}$$

- Sei $\mathcal{C} = A$-`Mod`. Dann gilt f surjektiv $\Rightarrow$ f epi wie in `Set`.

  Für die Rückrichtung sei f epi. Annahme: f ist nicht surjektiv. Dann ist $Z = Y/\operatorname{Im}(f) \neq 0$. Sei $u\colon Y \to Z$ die Quotientenabbildung und $0 = v\colon Y \to Z$ die Nullabbildung. Dann ist $u \neq v$ aber $fu = fv$, im Widerspruch zu f epi.

  Insgesamt gilt also in A-`Mod`:

  $$f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ epi.}$$

- Sei $\mathcal{C} =$ `Ring` die Kategorie der Ringe mit $1 \neq 0$ und einserhaltenden Ringhomomorphismen. Sei $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ die Inklusion. Dann ist f injektiv (also mono) und epi, aber nicht surjektiv.

  Sei R ein Ring und seien $u, v\colon \mathbf{Q} \to R$ Ringhomomorphismen mit $fu = fv$. Für $n \in \mathbf{Z}$ gilt dann $nu = nfu = nfv = nv$. Zudem ist wegen $n\frac{1}{n} = 1$ nun

  $$1 = 1u = u(n)u(\tfrac{1}{n}) \text{ und } 1 = 1v = v(n)v(\tfrac{1}{n})$$

  und wegen $u(n) = v(n)$ also auch $u(\frac{1}{n}) = v(\frac{1}{n})$. Doch damit ist für alle $\frac{n}{m} \in \mathbf{Q}$ stets $u(\frac{n}{m}) = u(n)u(\frac{1}{m}) = v(n)v(\frac{1}{m}) = v(\frac{n}{m})$, also $u = v$.

- Bijektiv muss nicht gleich iso sein: Sei X eine Menge und sei $X_1 = (X, T_1)$ mit diskreter Topologie T_1 und $X_2 = (X, T_2)$ mit indiskreter Topologie T_2.

  Dann ist $\mathrm{id}_X\colon X_1 \to X_2$ stetig, aber $\mathrm{id}_X\colon X_2 \to X_1$ nicht stetig für $|X| > 1$, also kein Morphismus in der Kategorie der topologischen Räume.

4.3 Definition Sei I eine Menge und $\{X_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Objekten in einer Kategorie $\mathcal{C}$.

(a) Ein Objekt X heißt *Produkt* der $\{X_i\}_{i\in I}$, falls es Morphismen $\{\pi_i\colon X \to X_i\}_{i\in I}$ gibt, sodass für alle Objekte Y und Morphismen $\{f_i\colon Y \to X_i\}_{i\in I}$ es genau einen Morphismus $f\colon Y \to X$ gibt mit $f_i = f\pi_i$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_i"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Bezeichnung: $X = \prod_{i\in I} X_i$ oder für $I = \{1, \ldots, n\}$ auch $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

(b) Ein Objekt X heißt *Coprodukt* der $\{X_i\}_{i\in I}$, falls es Morphismen $\{\iota_i\colon X_i \to X\}_{i\in I}$ gibt, sodass für alle Objekte Y und Morphismen $\{f_i\colon X_i \to Y\}_{i\in I}$ es genau einen Morphismus $f\colon X \to Y$ gibt mit $f_i = \iota_i f$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists! f"'] \\ Y & X_i \arrow[l, "f_i"] \arrow[u, "\iota_i"'] \end{tikzcd}$$

Bezeichnung: $X = \coprod_{i \in I} X_i$ oder $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ oder für $I = \{1, \dots, n\}$ auch $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$.

Bemerkung Wir betrachten den Fall $I = \emptyset$. 07.12.2016

- Für das Produkt X erhalten wir die Bedingung, dass es für alle Objekte $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ genau einen Morphismus $f\colon Y \to X$ gibt. So ein Objekt X heißt *terminales* Objekt in $\mathcal{C}$.
- Für das Coprodukt X erhalten wir Bedingung, dass es für alle Objekte $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ genau einen Morphismus $f\colon X \to Y$ gibt. So ein Objekt X heißt *initiales* Objekt in $\mathcal{C}$.

Beispiele

- Betrachte die Kategorie $\mathcal{C} = \texttt{Set}$ der Mengen.

  Initiales Objekt: Es ist $X = \emptyset$ initial, da es für jede Menge Y genau eine Abbildung $X = \emptyset \to Y$ gibt.

  Terminales Objekt: Jede einelementige Menge $X = \{x\}$ ist terminal, da es für jede Menge Y genau eine Abbildung $f\colon Y \to X$ gibt, die durch $y \mapsto x$ für $y \in Y$ gegeben ist.

  Beachte, dass X nicht eindeutig ist, aber je zwei einelementige Mengen, also terminale Objekte, in Set isomorph sind.

  Sei nun $I \neq \emptyset$ und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Mengen.

  Produkte: Sei $X = \{(x_i)_{i \in I} : x_i \in X_i\}$ das kartesische Produkt der X_i. Wir behaupten, dass X ein Produkt der X_i in der Kategorie Set ist.

  Dazu definiere die Projektionsabbildungen für $i \in I$ durch $\pi_i\colon X \to X_i, (x_i)_{i \in I} \mapsto x_i$.

  Für eine Menge Y und Abbildungen $f_i\colon Y \to X_i$ suche nun eine Abbildung $f\colon Y \to X$ mit $f\pi_i = f_i$ für alle $i \in I$. Für $y \in Y$ ist aber $yf\pi_i = yf_i$, also muss $yf = (yf_i)_{i \in I}$ sein. Damit ist so ein eindeutiges f gefunden.

  Also ist ein Produkt in Set tatsächlich durch das kartesische Produkt gegeben.

  Coprodukte: Sei $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ die disjunkte Vereinigung der X_i. Wir behaupten, dass X ein Coprodukt der X_i in der Kategorie Set ist.

  Dazu sei $\iota_i\colon X_i \to X$ die Inklusionsabbildung.

  Für eine Menge Y und Abbildungen $f_i\colon X_i \to Y$ suche nun eine Abbildung $f\colon X \to Y$ mit $\iota_i f = f_i$ für alle $i \in I$. Für $x \in X$ gibt es aber genau ein $i \in I$ mit $x = x_i \in X_i$, also $x = x_i \iota_i$. Also muss $xf := x_i f_i$ gesetzt werden. Damit ist so ein eindeutiges f gefunden.

  Also ist ein Coprodukt in Set tatsächlich durch die disjunkte Vereinigung gegeben.

- Betrachte die Kategorie $\mathcal{C} = A\text{-}\texttt{Mod}$ der A-Moduln über einer k-Algebra A.

  Sei also $I \neq \emptyset$ und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von A-Moduln.

  Produkt: Auf dem kartesischen Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist eine A-Modulstruktur gegeben durch $a(x_i)_{i \in I} := (ax_i)_{i \in I}$ und $(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} := (x_i + y_i)_{i \in I}$, für $a \in A$ und $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in X$.

  Sei $\pi_i\colon X \to X_i$ die Projektionsabbildung wie in Set. Dann ist π_i ein A-Modulhomomorphismus für $i \in I$ und wie in Set erhalten wir, dass X ein Produkt der X_i ist.

  Coprodukt: Sei $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ die direkte Summe der A-Moduln X_i, d.h. $(x_i)_{i \in I} \in X$ mit $x_i \in X_i$ und nur endlich vielen Einträgen ungleich 0.

  Wieder ist die A-Modulstruktur komponentenweise erklärt. Definiere nun Abbildungen ι_i durch

$$\iota_i\colon X_i \to X,\ x_i \mapsto (y_j)_{j \in I} \text{ mit } y_j = \begin{cases} x_i & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x_i\iota_i \in X$ schreibe auch einfach x_i, d.h. für $x = (x_i)_{i\in I}$ schreibe $x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$, wobei $0 \neq x_{i_j} \in X_{i_j}$.

Für einen A-Modul Y und A-Modulhomomorphismen $f_i\colon X_i \to Y$ suche nun $f\colon X \to Y$ mit $\iota_i f = f_i$. Da f ein Homomorphismus sein muss, gilt für $X \ni x = x_{i_1} + \ldots + x_{i_n}$

$$f(x) = f(x_{i_1}) + \ldots + f(x_{i_n}) := f_{i_1}(x_{i_1}) + \ldots + f_{i_n}(x_{i_n}).$$

Damit ist so ein eindeutiges f gefunden. Also ist das Coprodukt in A-`Mod` durch die direkte Summe gegeben.

4.4 Lemma *Falls in einer Kategorie $\mathcal{C}$ die Familie $\{X_i\}_{i\in I}$ von Objekten ein Produkt X besitzt, dann ist X eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus (analog für Coprodukt).*

Beweis. Seien $X = \prod_{i\in I} X_i$ und $Z = \prod_{i\in I} X_i$ zwei Produkte. Aus den folgenden beiden Diagrammen, wobei wir beim ersten Diagramm nutzen, dass X ein Produkt ist und beim zweiten Diagramm, dass Z ein Produkt ist, definieren wir Morphismen f und g.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\pi_i"] \\
Z \arrow[ur, dashed, "\exists ! g"] \arrow[r, "\lambda_i"'] & X_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "\lambda_i"] \\
X \arrow[ur, dashed, "\exists ! f"] \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Dann kommutieren auch die folgenden beiden Diagramme.

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dd, "\pi_i"] \\
& Z \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\
X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[rr, "\pi_i"'] & & X_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & Z \arrow[dd, "\lambda_i"] \\
& X \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
Z \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "\lambda_i"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

Allerdings sind auch die folgenden beiden Diagramme kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, "\pi_i"] \\
X \arrow[ur, dashed, "1_X"] \arrow[r, "\pi"'] & X_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "\lambda_i"] \\
Z \arrow[ur, dashed, "1_Z"] \arrow[r, "\lambda_i"'] & X_i
\end{tikzcd}$$

Da nun X und Z Produkte sind, folgt aus der Eindeutigkeit des universellen Pfeils in der Definition, dass $gf = 1_X$ und $fg = 1_Z$, d.h. X und Z sind isomorph mit f und g eindeutig bestimmt. $\square$

4.5 Definition (a) Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *additiv*, falls das Folgende gilt.

- Für alle Objekte $X_1, \ldots, X_n \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ existiert die direkte Summe $X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$.
- Für alle $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ eine abelsche Gruppe (additiv geschrieben). Wir bezeichnen das neutrale Element mit $0_{X,Y} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.
- Die Komposition von Morphismen ist bilinear: Für $f, f_1, f_2\colon X \to Y$ und $g, g_1, g_2\colon Y \to Z$ gilt
$$(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g \quad \text{und} \quad f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2.$$
- Es gibt ein Objekt $0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ (genannt *Nullobjekt*) mit $1_0 = 0_{00} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)$.

(b) Sei k ein Körper. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *k-Kategorie*, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ein k-Vektorraum ist für alle $X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und Komposition k-bilinear ist.

Bemerkung

- Sei $\mathcal{C}$ additiv. Dann ist das Nullobjekt initial, terminal und eindeutig (bis auf Isomorphismus).

  Für $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist, da $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,X)$ eine abelsche Gruppe ist, stets $0_{0X}\colon 0 \to X$ und für $f\colon 0 \to X$ ist $f = 1_0 f = 0_{00} f = (0_{00} - 0_{00}) f = 0_{00} f - 0_{00} f = 0_{0X}$. Analog zeigt man, dass 0 terminal ist.

  Für Eindeutigkeit sei auch $0'$ ein Nullobjekt in $\mathcal{C}$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0_{00'}"] \arrow[rr, bend right, "0_{00}=1_0"'] & 0' \arrow[r, "0_{0'0}"] \arrow[rr, bend left, "0_{0'0'}=1_{0'}"] & 0 \arrow[r, "0_{00'}"] & 0' \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad 0 \simeq 0'$$

- Sei $\mathcal{C}$ eine k-Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann ist $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ eine k-Algebra, wobei Multiplikation durch Komposition gegeben ist.

Beispiel Modulkategorien über k-Algebren sind additive k-Kategorien.

4.6 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus.

(a) Ein *Kern* von f ist ein Paar $(\mathrm{Kern}(f), u)$, welches aus einem Objekt $\mathrm{Kern}(f)$ und einem Morphismus $u\colon \mathrm{Kern}(f) \to X$ besteht, mit den folgenden Eigenschaften.

- Es gilt $uf = 0$.
- Für alle $h\colon Z \to X$ mit $hf = 0$ gibt es genau ein $g\colon Z \to \mathrm{Kern}(f)$ mit $gu = h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, "f"'] & & \\ & \mathrm{Kern}(f) \arrow[ul, "u"'] \arrow[dl, "0"] & Z \arrow[l, dashed, "\exists! g"'] \arrow[ull, bend right, "h"'] \arrow[dll, bend left, "0"] \\ Y & & \end{tikzcd}$$

(b) Ein *Cokern* von f ist ein Paar $(\mathrm{Cokern}(f), v)$, welches aus einem Objekt $\mathrm{Cokern}(f)$ und einem Morphismus $v\colon X \to \mathrm{Cokern}(f)$ besteht, mit den folgenden Eigenschaften.

- Es gilt $fv = 0$.
- Für alle $h\colon Y \to Z$ mit $fh = 0$ gibt es genau ein $g\colon \mathrm{Cokern}(f) \to Z$ mit $vg = h$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "0"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\ & \mathrm{Cokern}(f) \arrow[r, dashed, "\exists! g"] & Z \\ Y \arrow[ur, "v"'] \arrow[urr, bend right, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

Kern und Cokern sind, falls existent, eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beispiele

- Sei $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$ und $f\colon X \to Y$ ein A-Modulhomomorphismus.

  Kern: Sei $K = \{x \in X : xf = 0\}$. Zeige: $(K,\ u = \mathrm{incl}\colon K \to X)$ ist ein Kern von f.

Es ist K ein A-Linksmodul und es gilt $uf = 0$. Sei nun $h\colon Z \to X$ gegeben mit $hf = 0$. Dann gilt für alle $z \in Z$ stets $zhf = 0$, also $zh \in K$.

Definiere $g\colon Z \to K$ durch $zg = zh$. Dann ist $h = gu$ und g ist dadurch eindeutig bestimmt.

Cokern: Sei $C = Y/\operatorname{Im}(f)$ und sei $v\colon Y \to C$ die Restklassenabbildung. Zeige: (C, v) ist ein Cokern von f.

Es ist C ein A-Linksmodul und es gilt $fv = 0$. Sei nun $h\colon Y \to Z$ gegeben mit $fh = 0$. Dann ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Kern}(h)$, also ist $g\colon C = Y/\operatorname{Im}(f) \to Z$, $y + \operatorname{Im}(f) \mapsto yh$ wohldefiniert mit $h = vg$ und g ist dadurch eindeutig bestimmt.

Insgesamt hat in A-`Mod` also jeder Morphismus einen Kern und einen Cokern.

- Sei $\mathcal{C} = \texttt{Group}$ die Kategorie der Gruppen und $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. 12.12.2016

  Dann existiert ein Kern zu f, welcher gegeben ist durch $\operatorname{Kern}(f) = \{g \in G : gf = 1_H\}$ und $u = \operatorname{incl}\colon \operatorname{Kern}(f) \hookrightarrow G$.

  Für den Cokern sei

$$\langle f(G) \rangle = \bigcap_{f(G) \subseteq N \trianglelefteq H} N$$

  der kleinste Normalteiler von H, der das Bild von f enthält. Dann existiert auch ein Cokern von f, welcher gegeben ist durch $\operatorname{Cokern}(f) = H/\langle f(G) \rangle$ und der Quotientenabbildung $v\colon H \twoheadrightarrow H/\langle f(G) \rangle$.

Ist $(\operatorname{Kern}(f), u)$ ein Kern eines Morphismus f in einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$, so schreibe auch $\operatorname{Kern}(f) := u$ für den zugehörigen kanonischen Morphismus, analog für Cokerne.

4.7 Proposition *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$. Dann gilt:*

(a) $\operatorname{Kern}(f)$ *ist ein Monomorphismus.*

(b) f *ist ein Monomorphismus genau dann, wenn* $\operatorname{Kern}(f) = 0$.[1]

Eine analoge Aussage gilt auch für Cokerne und Epimorphismen.

Beweis. *Zu* (a): Sei $u := \operatorname{Kern}(f)$ der kanonische Morphismus. Seien ein Objekt Z in $\mathcal{C}$ und Morphismen $a, b\colon Z \to \operatorname{Kern}(f)$ gegeben mit $au = bu$.

Sei $c := au = bu$. Dann ist $cf = auf = a0 = 0$, also gibt es ein eindeutiges $d\colon Z \to \operatorname{Kern}(f)$ mit $c = du$. Aus der Eindeutigkeit folgt $d = a = b$, also $a = b$. Somit ist u mono.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
Z \arrow[u, shift left, "b"'] \arrow[u, shift right, "a"] \arrow[u, dashed, bend left, "\exists! d"] \arrow[ur, "c"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Zu (b): Sei $\operatorname{Kern}(f) = 0$. Zeige: f ist mono.

Seien ein Objekt Z und Morphismen $a, b\colon Z \to X$ gegeben mit $af = bf = 0$. Zeige: $a = b$, also $a - b = 0$. Allerdings ist $(a - b)f = 0$, also gibt es ein eindeutiges $g\colon Z \to \operatorname{Kern}(f)$ mit $(a - b) = g0 = 0$.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Kern}(f) = 0 \arrow[r, "u=0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
 & Z \arrow[ul, dashed, "\exists! g"] \arrow[u, "a-b"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

[1] d.h. es gilt sowohl für das Objekt $\operatorname{Kern}(f) = 0$ als auch für den kanonischen Morphismus $\operatorname{Kern}(f) = 0$

Sei nun f mono. Zeige $(\mathrm{Kern}(f), u) = (0,0)$.

Es ist $uf = 0 = 0f$, also mit f mono auch $u = 0$.

Sei $1 := 1_{\mathrm{Kern}(f)}$ und $0 := 0_{\mathrm{Kern}(f)}$. Dann ist $1u = 1 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 0 = 0u$, also mit u mono nach (a) auch $1 = 0$, also $\mathrm{Kern}(f) = 0$. $\square$

Bemerkung Was ist $\mathrm{Im}(f)$?

In den Kategorien k-`Vect` für einen Körper k oder A-`Mod` für eine k-Algebra A sei ein Morphismus $f\colon X \to Y$ gegeben. Dann gibt es Kern $(\mathrm{Kern}(f), u)$ und Cokern $(\mathrm{Cokern}(f) = Y/\mathrm{Im}(f), v)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &\simeq X/\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Cokern}(u) = \mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f)) \\ \mathrm{Im}(f) &\simeq \mathrm{Kern}(v) = \mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(f)). \end{aligned}$$

Hoffnung: Es gilt stets $\mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f)) \simeq \mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(f))$, sofern Kerne und Cokerne in einer additiven Kategorie existieren. Dann ist das die Definition des Bildes eines Morphismus.

Sei nun $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Sei $(\mathrm{Kern}(f), u)$ ein Kern von f und $(\mathrm{Cokern}(f), v)$ ein Cokern von f, sei $(\mathrm{Cokern}(u), p)$ ein Cokern von u und $(\mathrm{Kern}(v), i)$ ein Kern von v.

Gesucht ist: Ein Morphismus $g\colon \mathrm{Cokern}(u) \to \mathrm{Kern}(v)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, dashed, "\exists! a"] & Y \arrow[r, "v"] & \mathrm{Cokern}(f) \\ & \mathrm{Cokern}(u) \arrow[r, dashed, "\exists! g"] & \mathrm{Kern}(v) \arrow[u, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Wegen $fv = 0$ gibt es ein eindeutiges $a\colon X \to \mathrm{Kern}(v)$ mit $f = ai$. Es ist $0 = uf = uai$, also auch $0i = 0 = uai$. Es ist i als Kern jedoch mono, also ist auch $ua = 0$.

Doch dann gibt es ein eindeutiges $g\colon \mathrm{Cokern}(u) \to \mathrm{Kern}(v)$ mit $a = pg$. Damit erhalten wir das gesuchte g.

Problem: Dieses g muss kein Isomorphismus sein.

4.8 Definition Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *abelsch*, wenn $\mathcal{C}$ additiv ist und jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ einen Kern und Cokern besitzt und g (wie oben definiert) ein Isomorphismus $g\colon \mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f)) \to \mathrm{Kern}(\mathrm{Cokern}(f))$ ist.

Dann ist das *Bild* von f definiert als $\mathrm{Im}(f) := \mathrm{Cokern}(\mathrm{Kern}(f))$.

Nach Konstruktion von g oben haben wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Kern}(f) \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[r, "v"] & \mathrm{Cokern}(f) \\ & \mathrm{Cokern}(u) \arrow[r, "g", "\sim"'] & \mathrm{Kern}(v) \arrow[u, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $f = pgi$ mit p, pg epi und i, gi mono, d.h. in abelschen Kategorien faktorisiert jeder Morphismus f in $f = (\mathrm{epi}) \cdot (\mathrm{mono})$.

Beispiele Beispiele für abelsche Kategorien sind k-`Vect` für einen Körper k, A-`mod` für eine k-Algebra A mit $\dim_k A < \infty$ und Kategorien von Garben in der Topologie oder algebraischen Geometrie.

Theorem (Mitchells Einbettungssatz) *Jede abelsche Kategorie ist eine volle Teilkategorie einer Modulkategorie.*

Deshalb darf man in abelschen Kategorien mit Elementen rechnen.

4.9 Definition Eine (endliche oder unendliche) Folge von Objekten und Morphismen

$$\dots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *exakte Sequenz*, falls für alle $n \in \mathbf{Z}$ stets $\mathrm{Im}(f_n) = \mathrm{Kern}(f_{n-1})$ gilt.

Beispiele

- Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \xrightarrow{0} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{0} 0$$

heißt *kurze exakte Sequenz*. Dies bedeutet:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(0) &= \mathrm{Kern}(f), \text{ also ist } f \text{ mono.} \\ \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Kern}(g), \text{ also ist } fg = 0. \\ \mathrm{Im}(g) &= \mathrm{Kern}(0), \text{ also ist } g \text{ epi.} \end{aligned}$$

- Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \xrightarrow{0} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{0} 0$$

bedeutet, dass $\mathrm{Im}(0) = \mathrm{Kern}(f)$, also f mono und $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Kern}(0)$, also f epi. Übung: Dann ist f Isomorphismus.

Beispiel Sei A eine k-Algebra und betrachte $\mathcal{C} = A\text{-}\mathtt{Mod}$. Sei $X \subseteq Y$ ein Teilmodul. Dann gibt es die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \xhookrightarrow{\text{incl}} Y \xrightarrow{\text{quot}} Z \longrightarrow 0.$$

Ist $X = X_1 \oplus X_2$, so gibt es die kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "(1\ 0)"] & X_1 \oplus X_2 \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[l, bend left, dashed, "\binom{1}{0}"] & X_2 \arrow[r] \arrow[l, bend left, dashed, "(0\ 1)"] & 0 \end{tikzcd}$$

Allgemein heißt eine kurze exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[l, bend left, dashed, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

zerfallend oder *split exakt*, falls es ein $h\colon Z \to Y$ gibt mit $hg = 1_Z$. Dann ist $Y \simeq X \oplus Z$ mit f und g als Inklusion und Projektion.

Übung: A ist halbeinfach genau dann, wenn in A-$\mathtt{Mod}$ alle kurzen exakten Sequenzen zerfallen.

4.10 Definition Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien.

Ein *kovarianter Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni X \mapsto F(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ und Abbildungen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$, sodass $F(1_X) = 1_{F(X)}$ und $F(fg) = F(f)F(g)$ für $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$.

Ein *kontravarianter Funktor* $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus einer Abbildung $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \ni X \mapsto G(X) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ und Abbildungen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \ni f \mapsto G(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(Y), G(X))$, sodass $G(1_X) = 1_{G(X)}$ und $G(fg) = G(g)G(f)$ für $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$, d.h. G ist ein kovarianter Funktor $G\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ oder $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Beispiele

- Die Identität $\mathrm{id}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist ein kovarianter Funktor.
- Ein Morphismus in $\mathtt{Cat}$ ist ein kovarianter Funktor.
- Für $X_0 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ gibt es den konstanten Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, welcher gegeben ist durch $F(X) = X_0$ und $F(f) = 1_{F(X)}$.
- Sei $\mathcal{P}\colon \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ der Funktor mit $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ auf den Objekten. Für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ definiere, um einen kovarianten Funktor zu erhalten:

  $$f \mapsto \hat{f}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X),\ M \mapsto f(M),$$

  und definiere, um einen kontravarianten Funktor zu erhalten

  $$f \mapsto \check{f}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), N \mapsto f^{-1}(N).$$

- Die Fundamentalgruppe gibt einen kovarianten Funktor $\pi_1\colon \mathtt{Top}_* \to \mathtt{Group}$.
- Sei A eine k-Algebra. Dann ist A eine Kategorie mit einem Objekt und Morphismen $\operatorname{Hom}(A, A) = A$. Diese ist nicht additiv, aber k-linear.

  Ein k-linearer Funktor $A \to k\text{-}\mathtt{Vect}$, also ein Funktor mit $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$, ist dann genau dasselbe wie ein A-Modul.
- Sei Q ein Köcher. Dann ist Q eine Kategorie. Ein Funktor $F\colon Q \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ besteht aus k-Vektorräumen $F(i)$ für $i \in Q_0$ und linearen Abbildungen $F(\alpha)\colon F(i) \to F(j)$ für $\alpha \in Q_1$ mit $F(e_i) = \mathrm{id}_{F(i)}$. 14.12.2016

  Damit ist ein Funktor $F\colon Q \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ genau eine Köcherdarstellung von Q über k.
- Sei A eine k-Algebra und sei $1 = e_1 + \ldots + e_n$ eine orthogonale Zerlegung der 1 in Idempotente. Dann ist $A = \bigoplus_{i,j=1}^n e_i A e_j$.

  Wir erhalten eine Kategorie durch $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \{1, \ldots, n\}$ und $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(i, j) = e_i A e_j$.

  Ein kovarianter Funktor $M\colon \mathcal{C} \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ besteht aus Vektorräumen $M(i)$ und für alle $a \in A$ einer linearen Abbildung $M(e_i a e_j)\colon M(i) \to M(j)$.

  Damit ist M das gleich wie ein A-Rechtsmodul mit Zerlegung in direkte Summanden $M = \bigoplus_{i=1}^n M(i)$.

4.11 Definition Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ kovariante Funktoren. Ein Morphismus $\eta\colon F \to G$, *natürliche Transformation* genannt, ist eine Familie von Morphismen $\{\eta_X\colon F(X) \to G(X)\}_{X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}}$ in $\mathcal{D}$, so das für alle $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{D}$ das folgende Diagramm kommutiert,

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

d.h. es gilt $\eta_X G(f) = F(f)\eta_Y$.

Eine natürliche Transformation η heißt *natürliche Äquivalenz* oder *natürlicher Isomorphismus* oder *funktorieller Isomorphismus* oder *Isotransformation*, wenn η_X für alle $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ein Isomorphismus ist.

Ein kovarianter Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt *Äquivalenz von Kategorien*, wenn es einen kovarianten Funktor $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gibt und natürliche Isomorphismen $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to FG$ und $\theta\colon 1_{\mathcal{D}} \to GF$. Dann heißt G *quasiinvers* zu F und die Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißen *äquivalent.* Im kontravarianten Fall heißen F und G *Dualitäten.*

Die Kategorie $\operatorname{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ mit Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ als Objektklasse und natürlichen Transformationen zwischen ihnen (mit punktweiser Komposition) heißt *Funktorkategorie.*

Beispiele

- Betrachte A-Moduln als k-lineare Funktoren $A \to k\text{-}\mathtt{Vect}$. Seien also $F, G\colon A \to k\text{-}\mathtt{Vect}$ und sei $\eta\colon F \to G$ eine natürliche Transformation. Für $a \in \mathrm{Hom}_A(A, A) = A$ gilt dann
$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(a)"] & G(A) \arrow[d, "G(a)"] \\ F(A) \arrow[r, "\eta_A"] & G(A). \end{tikzcd}$$
Die Kommutativität bedeutet gerade, dass die k-linear Abbildung η_A zudem ein A-Modulhomomorphismus ist. Damit ist A-$\mathtt{Mod}$ äquivalent zu $\mathrm{Fun}(A, k\text{-}\mathtt{Vect})$.
- Die k-Dualität $\mathrm{Hom}(-, k)$ ist eine Dualität zwischen A-$\mathtt{mod}$ und $\mathtt{mod}$-A. Beachte, dass dies nur im endlichdimensionalen Fall gilt.
- Algebraische Geometrie kann verstanden als Studium der folgenden Dualität, d.h. kontravarianten Äquivalenz
$$\begin{aligned} F\colon \qquad \mathtt{AffVar} &\longrightarrow \mathtt{AffAlg} \\ \text{Varietät} &\longmapsto \text{Koordinatenring} \\ \text{Spektrum} &\longleftarrow\!\shortmid \text{Kommutative Algebra.} \end{aligned}$$
- Es sind $\mathtt{Set}$ und $\mathtt{Card}$ (die Kategorie der Kardinalzahlen) äquivalente Kategorien.

Bemerkung Können wir eine Kategorie $\mathcal{C}$ immer in eine Funktorkategorie einbetten?

Sei $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Definiere
$$\mathrm{H}^X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)\colon \ni \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}Y \mapsto \mathrm{H}^X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathtt{Set}.$$
Für $f\colon Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ definiere
$$\mathrm{H}^X(f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)\colon g \mapsto gf.$$
Dies definiert einen Funktor $\mathrm{H}^X\colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$, da
$$\mathrm{H}^X(1_Y)\colon g \mapsto g1_Y = g, \text{ also } \mathrm{H}^X(1_Y) = 1_{\mathrm{H}^X(Y)}$$
und für $f_1\colon Y \to Z$ und $f_2\colon Z \to W$ für alle $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gilt
$$\mathrm{H}^X(f_1 f_2)(g) = g f_1 f_2 = \mathrm{H}^X(f_2)(g f_1) = (\mathrm{H}^X(f_1)\mathrm{H}^X(f_2))(g).$$
Daher ist $\mathrm{H}^X\colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ ein kovarianter Funktor.

Alternativ erhalten wir einen Funktor $\mathrm{H}_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)\colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ durch
$$\mathrm{H}_X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \quad \text{und} \quad \mathrm{H}_X(f)\colon g \mapsto fg.$$
Dieser ist dann kontravariant.

4.12 Theorem (Yonedas Lemma)

(a) *Sei $F \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathtt{Set})$ und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann gibt es eine Bijektion*
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathtt{Set})}(\mathrm{H}^X, F) &\xrightarrow{\sim} F(X) \\ (\eta\colon \mathrm{H}^X \to F) &\longmapsto \eta_X(1_X). \end{aligned}$$

(b) *Sei $G \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathtt{Set})$ und $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$. Dann gibt es eine Bijektion*
$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathtt{Set})}(\mathrm{H}_X, G) &\xrightarrow{\sim} G(X) \\ (\eta\colon \mathrm{H}_X \to G) &\longmapsto \eta_X(1_X). \end{aligned}$$

Bemerkung Wir folgern für $F = \mathrm{H}^Y$ beziehungsweise $F = \mathrm{H}_Y$ für $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathtt{Set})}(\mathrm{H}^X, \mathrm{H}^Y) &\simeq \mathrm{H}^Y(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y)\\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathtt{Set})}(\mathrm{H}_X, \mathrm{H}_Y) &\simeq \mathrm{H}_Y(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).\end{aligned}$$

4.13 Korollar (Yoneda Einbettungen)

(a) *Die Zuordnung* $X \mapsto \mathrm{H}^X$ *definiert einen volltreuen Funktor* $\mathrm{H}^-\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathtt{Set})$.

(b) *Die Zuordnung* $X \mapsto \mathrm{H}_X$ *definiert einen volltreuen Funktor* $\mathrm{H}_-\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathtt{Set})$.

Bemerkung Yonedas Lemma gilt auch für

- eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ und einem additiven Funktor F nach $\mathtt{Ab}$.
- eine k-lineare Kategorie $\mathcal{C}$ und einem k-linearen Funktor F nach k-$\mathtt{Vect}$.

Man erhält auch entsprechende Yoneda Einbettungen.

Beweis von Theorem 4.12 (a). Der Beweis funktioniert ebenso mit Zusatzstrukturen, siehe Bemerkung oben. 19.12.2016

Zur Injektivität: Sei $\eta \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^X, F)$ eine natürliche Transformation, d.h. eine Familie von Morphismen $\eta_Y\colon \mathrm{H}^X(Y) \to F(Y)$, sodass für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^X(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathrm{H}^X(f)"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathrm{H}^X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Damit gilt $F(f)(\eta_X(1_X)) = \eta_Y(\mathrm{H}^X(f)(1_X)) = \eta_Y(1_X \cdot f) = \eta_Y(f)$.

Ist nun auch $\mu \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}^X, F)$ eine natürliche Transformation, so gilt für alle $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ nun $\mu_Y(f) = F(f)(\eta_X(1_X)) = \eta_Y(f)$, d.h. es ist $\mu = \eta$.

Zur Surjektivität: Wähle $\xi \in F(X)$ beliebig. Für $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ setze $\eta_Y(f) := F(f)(\xi)$. Zeige nun, dass $\eta\colon \mathrm{H}^X \to F$ eine natürliche Transformation definiert.

Dazu sei $g\colon Y \to Z$ in $\mathcal{C}$. Wir müssen zeigen, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H}^X(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[d, "\mathrm{H}^X(g)"] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\ \mathrm{H}^X(Z) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "\eta_Z"] & F(Z) \end{tikzcd}$$

Für $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ gilt aber

$$\eta_Z(\mathrm{H}^X(g)(f)) = \eta_Z(fg) = F(fg)(\xi) = F(g)(F(f)(\xi)) = F(g)(\eta_Y(f)).$$

Also ist $\eta_Z \mathrm{H}^X(g) = F(g)\eta_Y$, daher kommutiert das Diagramm und η ist eine natürliche Transformation mit $\eta_X(1_X) = F(1_X)(\xi) = 1_{F(X)}(\xi) = \xi$. □

4.14 Definition Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor.

- Es heißt F *dicht* (engl. *essentially surjective*), falls es für alle Objekte $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ ein $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ gibt mit $F(X) \simeq Y$.
- Es heißt F *treu*, falls für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, FY)$, wobei $f \mapsto F(f)$, injektiv ist.

- Es heißt F *voll*, falls für alle $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ die Abbildung $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, wobei $f \mapsto F(f)$ surjektiv ist.
- Es heißt F *volltreu*, falls F voll und treu ist.

4.15 Theorem *Sei $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor.*

Dann ist F eine Äquivalenz von Kategorien genau dann, wenn F volltreu und dicht ist.

Beweis. Sei F volltreu und dicht. Suche ein Quasiinverses $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ von F.

Sei $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$. Da F dicht ist, gibt es ein $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mit $Y \simeq F(X)$. Setze $G(Y) := X$. Fixiere einen Isomorphismus $\varphi_Y\colon Y \to F(X)$.

Sei nun $g\colon Y_1 \to Y_2$ in $\mathcal{D}$ mit $G(Y_1) = X_1$ und $G(Y_2) = X_2$. Da F volltreu ist, erhalten wir die Bijektion

$$\begin{aligned}\Psi\colon \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1,X_2) &\xrightarrow{\ \sim\ } \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX_1,FX_2)\\ f &\longmapsto F(f)\end{aligned}$$

Setze nun $G(g) = \Psi^{-1}(\varphi_{Y_1}^{-1} g \varphi_{Y_2}) \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1,X_2)$. Dann ist G ein Funktor.

Zeige nun: G is quasiinvers zu F. Nach Definition kommutiert für alle $g\colon Y_1 \to Y_2$ das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
Y_1 \arrow[r, "\varphi_{Y_1}", "\sim"'] \arrow[d, "g"] & F(X_1) \arrow[r, equal] \arrow[d, "F(f)"] & F(G(Y_1)) \arrow[d, "F(G(g))"] \\
Y_2 \arrow[r, "\varphi_{Y_2}", "\sim"'] & F(X_2) \arrow[r, equal] & F(G(Y_2))
\end{tikzcd}$$

Damit ist $\varphi\colon \operatorname{id}_{\mathcal{D}} \to F \circ G$ ein natürlicher Isomorphismus.

Für $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ ist $\varphi_{F(X)}\colon F(X) \to F(G(F(X)))$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$. Da F volltreu ist, gibt es (mit Ψ wie oben) ein Urbild $\eta_X\colon X \to G(F(X))$ in $\mathcal{C}$. Auch η_X ist dann ein Isomorphismus. Zeige: η ist eine natürliche Transformation. Dazu sei $f\colon X_1 \to X_2$ in $\mathcal{C}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}F(f\eta_{X_2}) = F(f)F(\eta_{X_2}) &= F(f)\varphi_{F(X_2)}\\ &= \varphi_{F(X_1)}F(G(F(f))) = F(\eta_{X_1})F(G(F(f))) = F(\eta_{X_1}G(F(f))).\end{aligned}$$

Da F nun volltreu ist, impliziert dies $f\eta_{X_2} = \eta_{X_1}G(F(f))$. Doch dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\eta_{X_1}", "\sim"'] \arrow[d, "f"] & G(F(X_1)) \arrow[d, "G(F(f)"] \\
X_2 \arrow[r, "\eta_{X_2}", "\sim"'] & G(F(X_2)),
\end{tikzcd}$$

d.h. $\eta\colon \operatorname{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ ist ein natürlicher Isomorphismus. Damit ist G quasiinvers zu F, d.h. F ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Sei umgekehrt F eine Äquivalenz von Kategorien. Sei $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ quasiinvers zu F und seien $\eta\colon \operatorname{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ und $\varphi\colon \operatorname{id}_{\mathcal{D}} \to F \circ G$ natürliche Isomorphismen.

Damit liefert φ_Y für $Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ einen Isomorphismus $Y \to F(G(Y)) = F(X)$ mit $X = G(Y)$, daher ist F dicht.

Seien nun $X_1, X_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Für $f\colon X_1 \to X_2$ ist dann $f = \eta_{X_1}(G \circ F)(f)\eta_{X_2}^{-1}$, d.h. es gilt $(G \circ F)(f) = \eta_{X_1}^{-1} f \eta_{X_2}$. Damit ist jedoch die Abbildung $f \mapsto (G \circ F)f$ eine Bijektion, also ist $f \mapsto F(f)$ eine Injektion, also ist F treu.

Umgekehrt erhalte für $Y_2, Y_2 \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ mit $g\colon Y_1 \to Y_2$ und $g = \varphi_{Y_1}(F \circ G)(g)\varphi_{Y_2}^{-1}$, dass $f \mapsto F(f)$ eine Surjektion ist, also ist F voll.

Insgesamt ist F also volltreu und dicht. □

5 Projektive Moduln und Zerlegungen

Bemerkung Für einen A-Modul X existiert nach Proposition 1.19 der Isomorphismus von 21.12.2016
A-Moduln $\mathrm{Hom}_A({}_AX, {}_AY) \to X,\ f \mapsto f(1)$, d.h. ein A-Modulhomomorphismus $A \to X$ ist durch seinen Wert auf 1 eindeutig bestimmt.

Sind nun A-Moduln X und Y, sowie ein surjektiver A-Modulhomomorphismus $\beta\colon Y \to X$ gegeben, so gibt es für jeden A-Modulhomomorphismus $\alpha\colon A \to X$ eine Hochhebung auf Y, d.h. es gibt $\gamma\colon Y \to X$ mit $\alpha = \gamma\beta$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] & \\
Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ist $x_0 = \alpha(1)$ und $y_0 \in \beta^{-1}(x_0)$ ein Urbild unter β, so konstruiere γ durch $\gamma(1) = y_0$.

Also hat A eine Hochhebungseigenschaft bezüglich in A startenden Morphismen.

5.1 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Objekt $P \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ heißt *projektiv*, falls für alle Morphismen $\alpha\colon P \to X$ und $\beta\colon Y \to X$, wobei β ein Epimorphismus ist, ein $\gamma\colon P \to Y$ existiert mit $\gamma\beta = \alpha$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \\
Y \arrow[r, "\beta"] & X
\end{tikzcd}$$

Beachte, dass projektive Objekte unter Äquivalenzen von Kategorien erhalten bleiben.

Beispiele

- Ist $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie mit einem initialen Objekt P, so ist P projektiv.

  Sind nämlich $\alpha\colon P \to X$ und ein Epimorphismus $\beta\colon Y \to X$ in $\mathcal{C}$ gegeben, so gibt es, da P initial, genau ein $\gamma\colon P \to Y$. Außerdem gibt es genau ein $\delta\colon P \to X$, daher ist $\delta = \alpha$ und $\delta = \gamma\beta$, also $\alpha = \gamma\beta$

- Ist $\mathcal{C} = \mathtt{Set}$ die Kategorie der Mengen, so ist jedes Objekt P projektiv.

  Sind nämlich $\alpha\colon P \to X$ und eine surjektive Abbildung $\beta\colon Y \to X$ gegeben, so wähle für alle $p \in P$ ein Urbild y von $\alpha(p)$ unter β und setze $\gamma(p) = y$.

5.2 Proposition *Sei* $\mathrm{Proj}\,A \subseteq A\text{-}\mathtt{Mod}$ *die volle Teilkategorie der projektiven A-Moduln, ebenso* $\mathrm{proj}\,A \subseteq A\text{-}\mathtt{mod}$ *die volle Teilkategorie der endlich erzeugten projektiven A-Moduln.*

(a) *Es ist* $\mathrm{Proj}\,A = \mathrm{Add}\,A$.

(b) *Es ist* $\mathrm{proj}\,A = \mathrm{add}\,A$.

Insgesamt sind also die (endlich erzeugten) projektiven A-Moduln genau die direkten Summanden von (endlich erzeugten) freien A-Moduln.

Beweis. Wir müssen nur (a) zeigen.

Sei P ein projektiver A-Modul. Zeige: $P \mid \bigoplus_{i\in I} A$ für eine Indexmenge I.

Schreibe P als Bild eines Epimorphismus $\beta\colon \bigoplus_{i\in I} A \to P$, zum Beispiel durch $I = P$ und $(a_p)_{p\in P}\beta = \sum_{p\in P} ap$.

Sei $\alpha = \mathrm{id}_P$. Da P projektiv, gibt es ein $\gamma\colon P \to \bigoplus_{i\in I} A$ mit $\gamma\beta = \mathrm{id}_P$, d.h. P ist direkter Summmand von $\bigoplus_{i\in I} A$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\alpha=\mathrm{id}_P"] & \\ \bigoplus_{i\in I} A \arrow[r, "\beta"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Für die Gegenrichtung beachte, dass nach der Bemerkung oben A projektiv ist als A-Modul. Zeige nun: Direkte Summen und Summanden von projektiven Moduln sind wieder projektiv.

Zu *Summen*: Seien $(P_i)_{i\in I}$ projektive A-Moduln. Sei $\beta\colon Y \to X$ ein Epimorphismus. Dann gibt es für jedes $\alpha_i\colon P_i \to X$ ein $\gamma_i\colon P_i \to Y$ mit $\gamma_i\beta = \alpha_i$.

Doch dann gibt es für jedes $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to X$ ein $\gamma = (\gamma_i)_{i\in I}\colon \bigoplus_{i\in I} P_i \to Y$ mit $\gamma\beta = (\gamma_i\beta)_i = (\alpha_i)_i = \alpha$, daher ist auch $\bigoplus_{i\in I} P_i$ projektiv.

$$\begin{tikzcd} & \bigoplus_{i\in I} P_i \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma=(\gamma_i)_i"'] \arrow[d, "\alpha=(\alpha_i)_i"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Zu *Summanden*: Seien P und Q gegeben mit $P \oplus Q$ projektiv.

Seien $\alpha\colon P \to X$ und ein Epimorphismus $\beta\colon Y \to X$ gegeben. Da $P \oplus Q$ projektiv, gibt es ein $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)\colon P \oplus Q \to Y$ mit $\gamma\beta = (\alpha, 0)$. Doch es ist $\gamma\beta = (\gamma_1, \gamma_2)\beta = (\gamma_1\beta, \gamma_2\beta)$, also auch $\gamma_1\beta = \alpha$. Doch dann ist P projektiv.

$$\begin{tikzcd} & P \oplus Q \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)"'] \arrow[d, "(\alpha{,}0)"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma_1"'] \arrow[d, "\alpha"] & \\ Y \arrow[r, "\beta"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da $\operatorname{Add} A$ aus direkten Summanden von Summen vom projektiven Modul A besteht, folgt damit die Aussage. $\square$

5.3 Korollar *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist halbeinfach (als Algebra).*

(b) *${}_AA$ ist halbeinfach (als Modul).*

(c) $\operatorname{add} A = A\text{-}\mathtt{mod}$.

(d) *Jeder Modul M in A-*`mod` *ist projektiv.*

(Konsequenz: Ist A halbeinfach und A-`mod` $\simeq$ *B-*`mod` *eine Äquivalenz, so ist auch B halbeinfach).*

Beweis. Die Äquivalenz $(a) \Leftrightarrow (b)$ ist Theorem 3.21 und $(c) \Leftrightarrow (d)$ ist Proposition 5.2.

Gilt (a), so ist $\operatorname{rad}(A) = 0$, also für $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$ auch $\operatorname{rad}(M) = \operatorname{rad}(A) \cdot M = 0$. Also ist M halbeinfach. Da $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A) = A$ ist, ist A bereits direkte Summe von einfachen A-Moduln, und jeder einfache A-Modul taucht als Summand auf. Also enthält $\operatorname{add} A$ alle halbeinfachen A-Moduln, daher ist M in $\operatorname{add} M$. Somit ist $\operatorname{add} A = A\text{-}\mathtt{mod}$.

Gilt umgekehrt (d), so ist auch $\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A)$ projektiv als A-Linksmodul. Sei $q\colon A \to \bar{A}$ die Quotientenabbildung. Dann gibt es $\gamma\colon \bar{A} \to A$ mit $\gamma q = \mathrm{id}_{\bar{A}}$, d.h. $\bar{A}$ ist ein direkter Summand von A.

$$\begin{tikzcd}
& & \bar{A} \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\bar{A}}"] & \\
\operatorname{rad}(A) \arrow[r, hook] & A \arrow[r, "q"] & \bar{A} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Weiterhin ist dann $A = \bar{A} \oplus \operatorname{rad}(A)$, also $\operatorname{rad}(A) = \operatorname{rad}(\bar{A}) \oplus \operatorname{rad}^2(A)$. Also gilt $\operatorname{rad}(A) = \operatorname{rad}(A)\operatorname{rad}(A)$ und Nakayamas Lemma (Theorem 3.16) impliziert nun $\operatorname{rad}(A) = 0$, d.h. A ist halbeinfach. $\square$

5.4 Proposition *Es ist P in A-`mod` projektiv genau dann, wenn jede kurze exakte Sequenz der Form*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\ g\ } P \longrightarrow 0$$

zerfällt, d.h. es gibt $h\colon P \to Y$ mit $hg = \mathrm{id}_P$.

Beweis. Ist P projektiv, so gibt es zu $\mathrm{id}_P\colon P \to P$, da g surjektiv, ein $h\colon P \to Y$ mit $hg = \mathrm{id}_P$. Somit zerfällt jede kurze exakte Sequenz.

Sei umgekehrt P in A-`mod`, sodass jede kurze exakte Sequenz obiger Form zerfällt. Da P endlich erzeugt ist, gibt es einen surjektiven A-Modulhomomorphismus $f\colon A^n \to P$ für ein $n \in \mathbf{N}$. Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Kern}(f) \hookrightarrow A^n \xrightarrow{\ f\ } P \longrightarrow 0.$$

Nach Voraussetzung zerfällt diese kurze exakte Sequenz, daher ist $A^n \simeq P \oplus \operatorname{Kern}(f)$. Also ist P ein direkter Summand von A^n und somit projektiv nach Proposition 5.2. $\square$

5.5 Korollar *Für eine endlichdimensionale Algebra A sind äquivalent:*

(a) *Es ist A halbeinfach.*

(b) *Alle kurzen exakten Sequenzen in A-`mod` zerfallen.*

5.6 Theorem (Satz von Maschke, 1899) *Sei k ein Körper von Charakteristik $\operatorname{char} k = p$. Sei G eine endliche Gruppe.*

Dann ist kG halbeinfach genau dann, wenn $p \nmid |G|$, d.h. wenn $|G|$ in k invertierbar ist.

Bemerkung Damit zerfällt die Darstellungstheorie endlicher Gruppen in zwei Zweige:

Man unterscheidet die *gewöhnliche* Darstellungstheorie im halbeinfachen Fall und die *modulare* Darstellungstheorie.

Beweis von Theorem 5.6. Sei $|G|$ invertierbar in k. Zeige: kG ist halbeinfach, d.h. alle kurzen exakten Sequenzen zerfallen. Sei also

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\ f\ } Y \xrightarrow{\ g\ } P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in kG-`mod`. Dann ist dies auch eine kurze exakte Sequenz in k-`Vect`. Dort zerfällt jedoch jede kurze exakte Sequenz, also gibt es eine k-lineare Abbildung $j\colon Z \to Y$ mit $jg = \mathrm{id}_Z$.

Nun definiere

$$\tilde{j}\colon Z \to Y,\ z \mapsto \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} hj(h^{-1}z).$$

Dann ist $\tilde{j}$ ein Homomorphismus von kG-Moduln, denn für $h_1 \in H$ und $z \in Z$ gilt

$$h_1\tilde{j}(z) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h_1 h j(h^{-1}z) = \frac{1}{|G|}\sum_{h'=h_1h\in G} h' j(h'^{-1}h_1 z) = \tilde{j}(h_1 z),$$

da aus $h' = h_1 h$ nun $h^{-1} = h'^{-1}h_1$ folgt. Weiterhin gilt $\tilde{j}g = \mathrm{id}_Z$, da für $z \in Z$

$$(\tilde{j}g)(z) = g\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} hj(h^{-1}z)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h\underbrace{(jg)}_{\mathrm{id}_Z}(h^{-1}z) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} hh^{-1}z = \frac{1}{|G|}\,|G|\,z = z.$$

Somit zerfällt jede Sequenz in kG-`mod`, also ist kG nach Korollar 5.5 halbeinfach.

Sei umgekehrt $|G| = 0$ in k. Wir zeigen $\mathrm{rad}(kG) \neq \{0\}$. Dazu suchen wir ein nichttriviales nilpotentes Ideal in kG.

Setze $x_0 = \sum_{g\in G} g$ und sei $I := \langle x_0\rangle_k$. Dann ist I ein eindimensionaler Unterraum von kG. Für $h \in G$ gilt zudem

$$hx_0 = h\left(\sum_{g\in G} g\right) = \sum_{g'=hg\in G} g' = x_0 = \sum_{g'=gh\in G} g' = \left(\sum_{g\in G} g\right)h = x_0 h,$$

also ist I ein zweiseitiges Ideal in kG. Da aber

$$x_0^2 = \left(\sum_{g\in G} g\right)\left(\sum_{h\in G} h\right) = |G|\left(\sum_{u\in G} u\right) = 0,$$

ist $I^2 = 0$. Also ist $0 \subsetneq I \subseteq \mathrm{rad}(kG)$, daher ist kG nicht halbeinfach. $\square$

5.7 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. 09.01.2017

- Der Morphismus f heißt *Retraktion*, falls es ein $g\colon Y \to X$ gibt mit $gf = \mathrm{id}_Y$. Dann heißt Y ein *Retrakt* von X.
- Der Morphismus f heißt *Coretraktion* (oder *Schnitt*), falls es ein $g\colon Y \to X$ gibt mit $fg = \mathrm{id}_X$.

In abelschen Kategorien nennen wir Retraktionen auch *split epi* und Coretraktionen auch *split mono*.

Bemerkung Es ist f ein Isomorphismus genau dann, wenn f Retraktion und Coretraktion ist.

5.8 Lemma *Für einen Morphismus $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{C}$ sind äquivalent.*

(a) *f ist eine Retraktion.*

(b) *Für alle $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,Y)$ surjektiv.*

(c) *Es ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,f)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Y)$ surjektiv.*

Beweis. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Sei f eine Retraktion. Dann gibt es ein $g\colon Y \to X$ mit $gf = \mathrm{id}_Y$. Sei $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ und $h\colon Z \to Y$. Dann ist $h = h \cdot \mathrm{id}_Y = hgf = (hg)f = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,f)(hg)$. Also ist $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,f)$ surjektiv.

Zu (b) $\Rightarrow$ (c): klar.

Zu (c) $\Rightarrow$ (a): Sei $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ das Urbild von id_Y unter der Surjektion $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,f)$. Dann ist $gf = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,f)(g) = \mathrm{id}_Y$, also f eine Retraktion. $\square$

5.9 Lemma *Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie.*

(a) *Sei $f\colon X \to Y$ eine Retraktion und $g\colon Y \to X$ mit $gf = \mathrm{id}_Y$. Dann ist $fg\colon X \to X$ idempotent, d.h. es gilt $(fg)^2 = fg$.*

(b) *Sei* $e\colon X \to X$ *idempotent. Seien* $i_1 = \mathrm{Kern}(e)\colon X_1 \to X$ *und* $i_2 = \mathrm{Kern}(\mathrm{id}_X - e)\colon X_2 \to X$ *gegeben. Dann ist* $X = X_1 \oplus X_2$ *mit den beiden Abbildungen* i_1 *und* i_2*. Außerdem ist* X *auch das Produkt von* X_1 *und* X_2*.*

Beweis. Ad (a): Es ist $(fg)^2 = (fg)(fg) = f(gf)g = f\,\mathrm{id}_Y\,g = fg$.

Ad (b): Es ist $(\mathrm{id}_X - e)e = e - e^2 = e - e = 0$, genauso $e(\mathrm{id}_X - e) = 0$. Nach der universellen Eigenschaft des Kerns gibt es $p_1\colon X \to X_1$ und $p_2\colon X \to X_2$ mit $\mathrm{id}_X - e = p_1 i_1$ und $e = p_2 i_2$.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "i_1"] & X \arrow[r, "e"] & X \\ & X \arrow[ul, "\exists! p_1"] \arrow[u, "\mathrm{id}_X - e"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, "i_2"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X - e"] & X \\ & X \arrow[ul, "\exists! p_2"] \arrow[u, "e"'] & \end{tikzcd}$$

Somit gilt

$$\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X - e + e = p_1 i_1 + p_2 i_2.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&i_1 p_1 i_1 = i_1(\mathrm{id}_X - e) = i_1 - i_1 e = \mathrm{id}_{X_1} i_1 && \overset{i_1 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_1 p_1 = \mathrm{id}_{X_1}\\
&i_2 p_2 i_2 = i_2 e = i_2(\mathrm{id}_X - (\mathrm{id}_X - e)) = i_2\,\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{X_2} i_2 && \overset{i_2 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_2 p_2 = \mathrm{id}_{X_2}\\
&i_1 p_2 i_2 = i_1 e = 0 = 0 i_2 && \overset{i_2 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_1 p_2 = 0\\
&i_2 p_1 i_1 = i_2(\mathrm{id}_X - e) = 0 = 0 i_1 && \overset{i_1 \text{ mono}}{\Longrightarrow} && i_2 p_1 = 0.
\end{aligned}$$

Damit zeige nun, dass $X = X_1 \oplus X_2$ ein Coprodukt ist. Dazu seien $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ mit $f_1\colon X_1 \to Y$ und $f_2\colon X_2 \to Y$ gegeben.

Zeige, dass es genau ein $f\colon X \to Y$ gibt mit $f_1 = i_1 f$ und $f_2 = i_2 f$.

Eindeutigkeit: Sei $f\colon X \to Y$ gegeben mit den gesuchten Eigenschaften. Dann ist

$$f = \mathrm{id}_X f = (p_1 i_1 + p_2 i_2) f = p_1 i_1 f + p_2 i_2 f = p_1 f_1 + p_2 f_2,$$

d.h. f ist durch f_1 und f_2 eindeutig bestimmt.

Existenz: Setze $f := p_1 f_1 + p_2 f_2$. Dann ist

$$i_1 f = \underbrace{i_1 p_1}_{=\mathrm{id}_{X_1}} f_1 + \underbrace{i_1 p_2}_{=0} f_2 = f_1 \qquad i_2 f = \underbrace{i_2 p_1}_{=0} f_1 + \underbrace{i_2 p_2}_{\mathrm{id}_{X_2}} f_2 = f_2.$$

Damit existiert ein f mit den gewünschten Eigenschaften.

Analog zeige, dass X ein Produkt von X_1 und X_2 ist mit den Abbildungen p_1 und p_2. □

5.10 Korollar *Sei* $\mathcal{C}$ *eine additive Kategorie und* $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$*. Dann entspricht jede Zerlegung* $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ *genau einer Zerlegung* $\mathrm{id}_X = e_1 + \ldots + e_n \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$ *in paarweise orthogonale Idempotente.*

5.11 Theorem (Projektivisierung) *Sei* A *eine endlichdimensionale* k*-Algebra und* $M \in A$-`mod`*. Sei* $B := \mathrm{End}_A(M)$*. Dann ist der Funktor*

$$\mathrm{Hom}_A(M, -)\colon\ \mathrm{add}\,M \to \mathrm{proj}\,B$$

eine Äquivalenz von Kategorien, insbesondere entsprechen Zerlegungen in $\mathrm{add}\,M$ *Zerlegungen in* $\mathrm{proj}\,B$*.*

Beweis. Es ist $\operatorname{Hom}_A(M,M) = B$ projektiv und für $n \in \mathbf{N}$ auch $\operatorname{Hom}_A(M,M^n) = B^n$ projektiv. Ist $M^n = M_1 \oplus M_2$, so ist $B^n = \operatorname{Hom}_A(M, M_1 \oplus M_2) = \operatorname{Hom}_A(M,M_1) \oplus \operatorname{Hom}_A(M,M_2)$, also auch $\operatorname{Hom}_A(M,M_1)$ projektiv. Daher bildet $\operatorname{Hom}_A(M,-)$ nach $\operatorname{proj} B$ ab.

Für $f\colon M_1 \to M_2$ ist $\operatorname{Hom}_A(M,f)\colon \operatorname{Hom}_A(M,M_1) \to \operatorname{Hom}_A(M,M_2)$ durch $g \mapsto gf$ gegeben. Wegen $\operatorname{Hom}_A(M,M) = B = \operatorname{Hom}_B(B,B)$ ist somit $\operatorname{Hom}_A(M,f)$ volltreu auf M. Mit Summen und Summanden folgt Volltreue wie oben analog.

Nach Theorem 4.15 genügt es also zu zeigen, dass $\operatorname{Hom}_A(M,-)$ dicht ist. Offensichtlich liegen B und B^n im Bild von $\operatorname{Hom}_A(M,-)$. Es genügt zu zeigen, dass beliebige Summanden von B^n im Bild von $\operatorname{Hom}_A(M,-)$ liegen.

Sei also $B^n = B_1 \oplus B_2$. Dies korrespondiert zu einer Zerlegung $1_{B^n} = e + (1-e)$ mit einem Idempotent e. Da f volltreu ist, korrespondiert dies zu einer Zerlgung $1_{M^n} = f + (1-f)$ mit einem Idempotent f. Doch dies liefert gerade eine Zerlegung $M^n = M_1 \oplus M_2$ mit $\operatorname{Hom}_A(M,M_1) = B_1$. □

5.12 Korollar *Sei $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$ und $B := \operatorname{End}_A(M)$ wie in Theorem 5.11. Dann gilt:*

$${}_AM \textit{ ist unzerlegbar } \Leftrightarrow {}_BB \textit{ ist unzerlegbar} \Leftrightarrow 0,1 \textit{ sind die einzigen Idempotente in } B.$$

Bemerkung Zerlegungen der 1 in orthogonale Idempotente sind nicht eindeutig.

Betrachte zum Beispiel $k^2 = k \oplus k$. Dann ist $B = \operatorname{End}_k(k^2) = \mathrm{M}_2(k)$.

Wir haben die Zerlegung in orthogonale Idempotente

$$1_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B.$$

Dieser entspricht die Zerlegung von k^2, welche durch

$$k^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben ist. Andererseits gibt es die Zerlegung

$$1_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in B.$$

Dieser entspricht die Zerlegung von k^2, welche durch

$$k^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben ist.

Nun zeige für eine endlichdimensionale k-Algebra A die Eindeutigkeit der Zerlegung in unzerlegbare Moduln in $\operatorname{proj} A$. Dazu betrachte die halbeinfache Algebra $\bar{A} := A/\operatorname{rad}(A)$. 11.01.2017

Wir müssen also Zerlegungen in $\operatorname{proj} A$ mit Zerlegungn in $\bar{A}\text{-}\mathtt{mod}$ vergleichen. Dazu können wir Idempotente in A mit Idempotenten in $\bar{A}$ vegleichen. Beachte, dass für ein Idempotent $e \in A$ stets $\bar{e} := e + \operatorname{rad}(A) \in \bar{A}$ ein nichttriviales Idempotent ist.

5.13 Lemma *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und sei $I \subseteq A$ ein nilpotentes zweiseitiges Ideal in A. Sei $u \in A$ mit $u - u^2 \in I$, also $\bar{u} = \bar{u}^2$ mit $\bar{u} = u + I$.*

Dann existiert ein Idempotent $e \in A$ mit $u - e \in I$, d.h. $\bar{e} = \bar{u}$ in A/I. In anderen Worten, man kann Idempotente modulo nilpotenter Ideale hochheben.

Insbesondere gibt es für jedes Idempotent $f \in A/\operatorname{rad}(A)$ ein Idempotent $e \in A$ mit $\bar{e} = f$, da $\operatorname{rad}(A)$ *nilpotent ist.*

Beweis. Zu gegebenen $u =: u_1 \in U$ mit $u_1 - u_1^2 \in I$ konstuiere u_2 mit $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$, aber $u_2 - u_2^2 \in I^2$. Führe dies dann induktiv fort. Da I nilpotent, ist dann $u_n - u_n^2 = 0$ für ein $n \in \mathbf{N}$, d.h. $e := u_n$ ist dann das gesuchte Idempotent.

Schreibe $r := u^2 - u \in I$, $u_1 = u$. Schreibe $w := u_2$ und setze $w := u^2 - ur$. Dann ist

$$w = u^2 - 2ur = u + r - 2ur \equiv u \mod I.$$

Weiterhin ist $ur = u(u - u^2) = ru$, und wegen $r \in I$ ist $r^2 \in I^2$. Nun betrachte

$$\begin{aligned} w^2 &= (u + r - 2ur)^2 \\ &= (u+r)^2 - 4(u+r)ur + 4u^2r^2 \\ &= u^2 + 2ur + r^2 - 4u^2r - 4ur^2 + 4u^2r^2 \\ &\equiv u^2 + 2ur - 4u^2r \mod I^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} w &= u^2 - 2ur \\ &= u^2 + 2ur - 4ur \\ &= u^2 + 2ur - 4(u^2 - r)r \\ &= u^2 + 2ur - 4u^2r + 4r^2 \\ &\equiv u^2 + 2ur - 4u^2r \mod I^2 \\ &\equiv w^2 \mod I^2. \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Aussage folgt. □

5.14 Theorem *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra.*

(a) *Seien P und Q projektive A-Moduln. Schreibe $\bar{P} := P/\operatorname{rad}(P)$ und $\bar{Q} := Q/\operatorname{rad}(Q)$. Dann gilt $P \simeq Q$ genau dann, wenn $\bar{P} \simeq \bar{Q}$.*

(b) *Die Zuordnung $P \mapsto \bar{P}$ definiert eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen von projektiven A-Moduln und Isomorphieklassen projektiver $\bar{A}$-Moduln (und damit Isoklassen von $\bar{A}$-Moduln allgemein). Dabei ist P unzerlegbar genau dann, wenn $\bar{P}$ unzerlegbar ist.*

(c) *Sei P ein projektiver A-Modul. Seien $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_\ell$ Zerlegungen in direkte Summen unzerlegbarer projektiver Moduln. Dann ist $n = \ell$ und nach Umordnung $P_j \simeq Q_j$ für $j = 1, \ldots, n$.*

Beweis. *Ad* (a): Sei $f\colon P \to Q$ ein Isomorphismus von A-Moduln. Wegen $\operatorname{rad}(P) = \operatorname{rad}(A) \cdot P$ und $\operatorname{rad}(Q) = \operatorname{rad}(A) \cdot Q$ ist

$$f(\operatorname{rad}(P)) = f(\operatorname{rad}(A) \cdot P) = \operatorname{rad}(A) \cdot f(P) = \operatorname{rad}(A) \cdot Q = \operatorname{rad}(Q).$$

Also ist die Einschränkung $f|_{\operatorname{rad}(P)}^{\operatorname{rad}(Q)}\colon \operatorname{rad}(P) \to \operatorname{rad}(Q)$ wohldefiniert und bijektiv, d.h. f induziert einen Isomorphismus $\bar{f}\colon \bar{P} \to \bar{Q}$.

Sei umgekehrt $g\colon \bar{P} \to \bar{Q}$ ein Isomorphismus. Seien $r\colon P \twoheadrightarrow \bar{P}$ und $s\colon Q \twoheadrightarrow \bar{Q}$ die Quotientenabbildungen. Da P projektiv ist, gibt es $h\colon P \to Q$ mit $hs = rg$ und da Q projektiv ist gibt es $j\colon Q \to P$ mit $jr = sg^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, two heads, "r"] \arrow[ddl, "\exists h"'] & \\ & \bar{P} \arrow[d, "g", "\wr"'] & \\ Q \arrow[r, two heads, "s"] & \bar{Q} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Q \arrow[d, two heads, "s"] \arrow[ddl, "\exists j"'] & \\ & \bar{Q} \arrow[d, "g^{-1}", "\wr"'] & \\ P \arrow[r, two heads, "r"] & \bar{P} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Nach Nakayamas Lemma 3.16 sind nun h und j surjektiv. Damit gilt aus Dimensionsgründen $P \simeq Q$.

Ad (b): Die Zuordnung zwischen den Isomorphieklassen ist wohldefiniert und injektiv nach (a). Für die Surjektivität beachte, dass wegen $\mathrm{rad}(P \oplus Q) = \mathrm{rad}(P) \oplus \mathrm{rad}(Q)$ auch $P \oplus Q \mapsto \bar{P} \oplus \bar{Q}$ gilt. Daher ist die Zuordnung additiv. Nach Theorem 3.12 ist jedoch jeder unzerlegbare halbeinfache Modul isomorph zu einem direkten Summanden von $\bar{A}$.

Ad (c): Dies folgt nun direkt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung für halbeinfache Moduln. □

5.15 Theorem (Satz von Krull-Remak-Schmidt) *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und $M \in A\text{-}\mathtt{mod}$. Dann hat M bis auf Umordnung und Isomorphie eine eindeutige Zerlegung $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ in unzerlegbare direkte Summanden.*

Bemerkung In unserem Zugang zu Theorem 5.15 sind wir über die Projektivisierung von einer Zerlegung $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ zu einer Zerlegung $B = Be_1 \oplus \ldots \oplus Be_n$ des Endomorphismenrings $B = \mathrm{End}_A(M)$ übergegangen. Dort sind wir dann zum halbeinfachen Fall $\bar{B} = \bar{B}e_1 \oplus \ldots \oplus \bar{B}e_n$ übergegangen.

Dies war nötig, da der direkte Weg zum halbeinfachen durch $M \mapsto \bar{M} = M/\mathrm{rad}(M)$ nicht zum Ziel führt: Eine Zerlegung von $\bar{M}$ liefert im Allgemeinen keine Zerlegung von M. Insbesondere ist es möglich, dass $\bar{M}$ zerlegbar, aber M unzerlegbar ist.

Beispiel Betrachte den Köcher $Q = (1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3)$. Betrachte den kQ-Modul mit $k \longrightarrow k \longleftarrow k$ und Identitäten als Pfeile dazwischen. Dann gilt für einen beliebigen kQ-Modulhomomorphismus

$$\begin{tikzcd} M & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "a"] & k \arrow[d, "b"] & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d, "c"] \\ M & k \arrow[r, "1"] & k & k \arrow[l, "1"'] \end{tikzcd}$$

mit $a, b, c \in k$ stets $a = b = c$, also ist $\mathrm{End}(M) \simeq k$. Somit ist M unzerlegbar.

Betrachte nun den einfachen kQ-Modul S_2 mit $0 \longrightarrow k \longleftarrow 0$ und den injektiven kQ-Modulhomomorphismus, welcher durch

$$\begin{tikzcd} M & k \arrow[r, "1"] & k & k \arrow[l, "1"'] \\ S_2 \arrow[u] & 0 \arrow[r, "0"] \arrow[u, "0"] & k \arrow[u, "1"] & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "0"] \end{tikzcd}$$

gegeben ist. Aus der exakten Sequenz $S_2 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/S_2$ sehen wir, dass

$$M/S_2 = (k \longrightarrow 0 \longleftarrow k) = (k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0) \oplus (0 \longrightarrow 0 \longleftarrow k) = S_1 \oplus S_3.$$

Damit ist M/S_2 halbeinfach und der größte halbeinfache Quotient von M, daher ist $\mathrm{rad}(M) = S_2$ und $\bar{M} = M/S_2 \simeq S_1 \oplus S_3$.

5.16 Definition Ein Idempotent $0 \neq e = e^2 \in A$ heißt *primitiv*, falls für alle Idempotente $e_1, e_2 \in A$ mit $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ und $e_1 + e_2 = e$ entweder $e_1 = 0$ oder $e_2 = 0$ ist.

Damit ist eine orthogonale Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in in primitive Idempotente eine Zerlegung, die nicht weiter verfeinert werden kann.

5.17 Theorem *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und seien zwei orthogonale Zerlegungen $1_A = e_1 + \ldots + e_n = f_1 + \ldots + f_\ell$ in primitive Idempotente.*

Dann gilt $n = \ell$ und es gibt ein invertierbares $a \in A$, sodass nach Umordnung $f_j = a^{-1}e_ja$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt.

Beweis. Zu jeder orthogonalen Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in primitive Idempotente gehört eine Zerlegung ${}_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ in unzerlegbare A-Moduln, da $\operatorname{End}(Ae_i) = e_iAe_i$ nur das Idempotent e_i hat.

Somit erhalten wir zwei Zerlegungen ${}_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n = Af_1 \oplus \ldots \oplus Af_\ell$ in unzerlegbare direkte Summanden. Nach Theorem 5.15 gilt also $n = \ell$ und nach Umordnung $Ae_i \simeq Af_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Sei $a_i \in \operatorname{Hom}_A(Ae_i, Af_i) = e_iAf_i$ ein solcher Isomorphismus, $b_i \in \operatorname{Hom}_A(Af_i, Ae_i)$ sein Inverses. Dann gilt für $i, j = 1, \ldots, n$ stets

$$a_ib_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mathrm{id}_{Ae_i} = e_i & i = j \end{cases} \text{ und } b_ia_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \mathrm{id}_{Af_i} = f_i & i = j \end{cases}$$

Also ist $a := a_1 + \ldots + a_n$ invertierbar mit Inversem $a^{-1} = b = b_1 + \ldots + b_n$ und es gilt für $i = 1, \ldots, n$ stets $a^{-1}e_ia = b_ie_ia_i = b_ia_ib_ia_i = f_i^2 = f_i$. □

Beispiel Sei $A = \mathrm{M}_2(k)$ die k-Algebra der 2×2-Matrizen. Sei $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $f_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $Ae_1 \simeq Af_1 \simeq k^2$. Insbesondere ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{f_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{a_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_1}.$$

5.18 Definition Sei R ein Ring und sei $\mathrm{NU} := \mathrm{NU}(R) := \{x \in R : x \text{ ist nicht invertierbar}\}$. 16.01.2017

Wir nennen R einen *lokalen Ring*, falls NU ein zweiseitiges Ideal in R ist.

Bemerkung Sei R ein lokaler Ring. Wegen $1 \notin \mathrm{NU}$ ist NU ein echtes Ideal.

Außerdem ist für ein echtes Ideal $I \leq \mathrm{NU}$ jedes $x \in I$ nicht invertierbar, also ist $I \subseteq \mathrm{NU}$. Damit ist NU das eindeutig maximale zweiseitige Ideal in R.

Damit ist NU das *Brown-McCoy-Radikal* von R. Aus den Übungen ist bekannt: Ist R eine endlichdimensionale k-Algebra, so stimmt das Brown-McCoy-Radikal mit dem Jacobson-Radikal überein. Insbesondere gilt $\mathrm{rad}(R) = \mathrm{NU}$.

Beispiel Es ist $R = k[x]/(x^n)$ ein lokaler Ring mit $\mathrm{NU} = (x)/(x^n)$.

5.19 Lemma *Sei R ein lokaler Ring und $e = e^2 \in R$ ein Idempotent. Dann ist $e \in \{0, 1\}$.*

Beweis. Angenommen, es gibt ein Idempotent $e = e^2 \in R$ mit $e \notin \{0, 1\}$. Dann ist auch $1 - e$ ein Idempotent mit $1 - e \notin \{0, 1\}$. Wegen $e(1 - e) = 0$ sind aber e und $1 - e$ nicht invertierbar.

Also ist $e, 1 - e \in \mathrm{NU}$. Da NU aber ein Ideal in R ist, ist somit auch $1 = e + (1 - e) \in \mathrm{NU}$, also $\mathrm{NU} = R$, im *Widerspruch* zu $1 \notin \mathrm{NU}$. □

Beispiel Sei $R = \mathbf{Z}$. Dann sind 0 und 1 die einzigen Idempotente. Allerdings ist $2, 3 \in \mathrm{NU}$, jedoch $1 = 3 - 2 \notin \mathrm{NU}$. Also ist NU kein Ideal und somit $\mathbf{Z}$ kein lokaler Ring.

5.20 Proposition *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und P projektiv. Dann sind äquivalent:*

(a) *P ist unzerlegbar.*

(b) $\mathrm{rad}(P)$ *ist ein maximaler Teilmodul von P.*

(c) $\operatorname{End}_A(P)$ *ist ein lokaler Ring.*

Beweis. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Da P unzerlegbar ist, ist $P/\mathrm{rad}(P)$ auch unzerlegbar und halbeinfach, also einfach. Daher ist $\mathrm{rad}(P)$ ein maximaler Teilmodul von P.

Zu (b) $\Rightarrow$ (c): Sei $\mathrm{rad}(P)$ ein maximaler Teilmodul von P. Sei $f\colon P \to P$ mit $f \in \operatorname{End}_A(P)$.

Ist nun f surjektiv, so ist f wegen $\dim_k P < \infty$ ein Isomorphismus, also invertierbar.

Ist f nicht surjektiv, so ist $\mathrm{Im}(f) \subsetneq P$ ein echter Teilmodul, liegt also in $\mathrm{rad}(P)$. Daher ist

$$\mathrm{NU}(\mathrm{End}_A(P)) = \{f\colon P \to P : \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P)\}.$$

Offensichtlich ist die Summe zweier Elemente aus NU wieder in NU. Sei nun auch $g \in \mathrm{End}_A(P)$. Dann ist $\mathrm{Im}(gf) \subseteq \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{rad}(P)$, also $gf \in \mathrm{NU}$.

Wegen $g(\mathrm{rad}(P)) \subseteq \mathrm{rad}(P)$ ist aber auch $\mathrm{Im}(fg) \subseteq \mathrm{rad}(P)$, also auch $fg \in \mathrm{NU}$.

Daher ist NU ein zweiseitiges Ideal in $\mathrm{End}_A(P)$, also ist $\mathrm{End}_A(P)$ ein lokaler Ring.

Zu (c) $\Rightarrow$ (a): Ist $\mathrm{End}_A(P)$ lokal, so sind nach Lemma 5.19 alle Idempotente 0 oder 1, also ist P unzerlegbar. $\square$

Proposition 5.20 liefert durch Projektivisierung (Theorem 5.11):

5.21 Korollar *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra und $M \in A$-$\mathtt{mod}$. Dann ist M unzerlegbar genau dann, wenn $\mathrm{End}_A(M)$ ein lokaler Ring ist.*

Frage: Wann ist A als Algebra zerlegbar oder unzerlegbar?

Seien A_1 und A_2 zwei k-Algebren. Definiere deren Summe $A = A_1 \oplus A_2$ durch komponentenweise Multiplikation und Addition. Für $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$ schreibe $a_1 + a_2 := (a_1, a_2)$. Beachte, dass $A_1, A_2 \subseteq A$ dann zweiseitige Ideale in A sind.

Die Eins ist durch $1_A = 1_{A_1} + 1_{A_2}$ gegeben und es gilt $1_{A_1}1_{A_2} = 1_{A_2}1_{A_1} = 0$ und $1_{A_1}^2 = 1_{A_1}$, sowie $1_{A_2}^2 = 1_{A_2}$. Somit sind 1_{A_1} und 1_{A_2} orthogonale Idempotente.

Beispiel Sei $A = \mathrm{M}_n(k)$ die k-Algebra der $n \times n$-Matrizen. Sei $e = e^2 \in A$ ein idempotent.

Dann ist jedoch $A \neq eAe \oplus (1-e)A(1-e)$, da A als einfache Algebra keine zweiseitigen Ideale außer 0 und A selbst besitzt.

Insbesondere liefert eine Zerlegung der 1 in paarweise orthogonale Idempotente im Allgemeinen keine Zerlegung von A als Algebra.

5.22 Proposition *Sei A ein Ring. Eine Zerlegung von A als Ring in $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ entspricht einer Zerlegung $1_A = e_1 + \ldots + e_n$ in paarweise orthogonale zentrale Idempotente, d.h. $e_i \in \mathrm{Z}(A)$ für $i = 1, \ldots, n$.*

Somit ist A unzerlegbar als Ring genau dann, wenn 1_A zentralprimitiv in A ist, also 1_A primitiv in $\mathrm{Z}(A)$ ist.

Insbesondere gilt für eine k-Algebra A mit $\dim_k A$: Es ist A unzerlegbar genau dann, wenn $\mathrm{Z}(A)$ ein lokaler Ring ist.

Beweis. Dank Induktion genügt es, den Fall $n = 2$ zu betrachten.

Sei $A = A_1 \oplus A_2$. Dann sind 1_{A_1} und 1_{A_2} orthogonale Idempotente und es gilt für $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$

$$(1_{A_1}, 0)(a_1, a_2) = (a_1, 0) = (a_1, a_2)(1_{A_1}, 0), \text{ sowie } (0, 1_{A_2})(a_1, a_2) = (0, a_2) = (a_1, a_2)(0, 1_{A_2}).$$

Also sind $1_{A_1} = (1_{A_1}, 0)$ und $1_{A_2} = (0, 1_{A_2})$ zentral in A.

Sei umgekehrt $e = e^2 \in \mathrm{Z}(A)$ ein zentrales Idempotent. Dann ist $1 = e + (1-e)$ eine Zerlegung der Eins. Zeige: $A = eAe \oplus (1-e)A(1-e)$ ist eine Zerlegung als k-Algebren.

Wegen $e \in \mathrm{Z}(A)$ ist $eAe = eA = eA$, also ist eAe ein zweiseitiges Ideal von A. Für alle $a \in A$ ist zudem $eeae = eae = eaee$, also ist e eine Eins in eAe. Somit ist eAe eine k-Algebra. Für $(1-e)A(1-e)$ gilt dies analog.

Ist nun $a \in eAe \cap (1-e)A(1-e)$, so ist $a = ae = a(1-e)$, so $a = ae(1-e) = 0$. Somit gilt $eAe \cap (1-e)A(1-e) = \{0\}$. Für $a \in A$ beliebig ist zudem $a = a1 = ae + a(1-e)$ mit $ae \in eAe$ und$a(1-e) \in (1-e)A(1-e)$. Insgesamt gilt also $A = eAe \oplus (1-e)A(1-e)$. $\square$

Beispiel Betrachte den Köcher $Q = \big(1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3\big)$ und die Wegealgebra kQ. Sei $V \in kQ\texttt{-rep}$, d.h. $V = \big(V(1) \xrightarrow{f} V(2) \xrightarrow{g} V(3)\big)$ mit endlichdimensionalen k-Vektorräumen $V(i)$ und linearen Abbildungen f und g.

Sei $S_3 = \big(0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k\big)$ der einfache Modul an 3 und betrachte den injektiven Homomorphismus von kQ-Darstellungen

$$\begin{tikzcd} V & & V(1) \arrow[r, "f"] & V(2) \arrow[r, "g"] & V(3) \\ S_3^{\dim V(3)} \arrow[u, hook] & & 0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \arrow[u] \arrow[r] & V(3). \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

Wir erhalten die kurze exakte Sequenz $S_3^{\dim V(3)} \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/S_3^{\dim V(3)} = \big(V(1) \xrightarrow{f} V(2) \longrightarrow 0\big)$.

Sei nun $S_2 = \big(0 \longrightarrow k \longrightarrow 0\big)$ der einfache Modul an 2 und betrachte den injektiven Homomorphismus

$$\begin{tikzcd} V/S_3^{\dim V(3)} & & V(1) \arrow[r, "f"] & V(2) \arrow[r] & 0 \\ S_2^{\dim V(2)} \arrow[u, hook] & & 0 \arrow[u] \arrow[r] & V(2) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r] & 0. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dann ist $S_2^{\dim V(2)} \hookrightarrow V/S_3^{\dim V(3)} \twoheadrightarrow (V/S_3^{\dim V(3)})/S_2^{\dim V(2)} = \big(V(1) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0\big) = S_1^{\dim V(1)}$ mit dem einfachen Modul S_1 an 1.

Insgesamt sehen wir, dass V in gewissem Sinne "zusammengesetzt" ist aus einfachen Moduln, d.h. es gibt eine Kette von kQ-Moduln $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_n$ mit einfachen Faktoren V_j/V_{j+1} für alle j. Dabei kommt zum Beispiel der einfache Faktor S_1 genau $\dim V(1)$-mal vor.

5.23 Definition Sei A eine k-Algebra und M ein A-Modul.

Eine endliche Kette von Teilmoduln $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$, wobei M_{j+1}/M_j einfach ist für $j = 0, \ldots, n-1$, heißt *Kompositionsreihe* oder *Jordan-Hölder-Reihe* von M. Die vorkommenden einfachen Moduln $S \simeq M_{j+1}/M_j$ heißen *Kompositionsfaktoren* von M. Die *Multiplizität* oder *Vielfachheit* von S ist die Anzahl der Indizes $j+1$ mit $S \simeq M_{j+1}/M_j$. Die Länge der Kette $\ell(M) ::= n$, also die Summe der Multiplizitäten heißt *(Kompositions-)Länge* von M.

Beispiel Betrachte die Kette von Teilmoduln

$$k[x] \supseteq xk[x] \supseteq x^2k[x] \supseteq \ldots.$$

Dann ist jeder Quotient aufeinanderfolgender Teilmoduln isomorph zu $k[x]/xk[x]$, also zum einfachen Modul gegeben durch die folgende Köcherdarstellung.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[loop right, "0"] \end{tikzcd}$$

Für ein beliebiges $\lambda \in k$ erhalten wir außerdem die Kette

$$k[x] \supseteq (x-\lambda)k[x] \supseteq (x-\lambda)^2k[x] \supseteq \ldots.$$

Hier ist jeder Quotient isomorph zum einfachen Modul, welcher durch die folgende Köcherdarstellung gegeben ist.

$$\begin{tikzcd} k \arrow[loop right, "\lambda"] \end{tikzcd}$$

Somit kann bei einer Verallgemeinerung auf unendlich lange Kompositionsreihen keine Eindeutigkeit der Faktoren und ihrer Vielfachheiten erwartet werden.

5.24 Theorem (Satz von Jordan-Hölder) *Seien* $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_n = M$ *und* $0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \ldots \subsetneq N_\ell = M$ *zwei Kompositionsreihen von* M*.*

Dann gilt $n = \ell$ *und die Kompositionsfaktoren und ihre Vielfachheiten in den beiden Kompositionsreihen stimmen überein (bis auf Anordnung und Isomorphie).*

Beweis. Ohne Einschränkung ist $n \leq \ell$. Wir führen den Beweis per Induktion nach n, d.h. nach 18.01.2017
der Länge der kürzeren Kompositionsreihe.

Ist $n = 1$, so ist $M = M_1 = N_\ell$ einfach, also $\ell = 1$ und somit $N_1 = M_1 = M$.

Sei nun $n > 1$. *Falls* $M_{n-1} = N_{\ell-1}$, so wende Induktion auf M_{n-1} an. Es folgt $n - 1 = \ell - 1$, somit auch $n = \ell$ und die zu zeigende Aussage folgt.

Falls $M_{n-1} \neq N_{\ell-1}$, so ist $M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \subsetneq M_{n-1}, N_{\ell-1}$. Sonst wäre nämlich $M_{n-1} \subsetneq N_{\ell-1}$ oder umgekehrt, im Widerspruch zu M_n/M_{n-1}, bzw. $N_\ell/N_{\ell-1}$ einfach. Es ist $M = M_{n-1} + N_{\ell-1}$, da M/M_{n-1} einfach ist, also M_{n-1} maximal mit $N_{\ell-1} \nsubseteq M_{n-1}$.

Es gilt der *Isomorphiesatz für Moduln*: Für Moduln X und Y ist $(X + Y)/X \simeq Y/(X \cap Y)$. Somit ist

$$\begin{aligned} S &:= M/M_{n-1} = (M_{n-1} + N_{\ell-1})/M_{n-1} \simeq N_{\ell-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}) \\ T &:= N/N_{n-1} = (M_{n-1} + N_{\ell-1})/N_{\ell-1} \simeq M_{n-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}). \end{aligned}$$

Insgesamt sind wir also in der folgenden Situation.

$$\begin{tikzcd}
& & M = M_{n-1} + N_{\ell-1} & & \\
& M_{n-1} \arrow[ur, dash, "S"] & & N_{\ell-1} \arrow[ul, dash, "T"'] & \\
M_{n-2} \arrow[ur, dash] & & M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \arrow[ul, dash, "T"] \arrow[ur, dash, "S"'] & & N_{\ell-2} \arrow[ul, dash]
\end{tikzcd}$$

Nun betrachte die folgende Kette von Teilmoduln

$$M_{n-1} \supseteq M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-2} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-3} \cap N_{\ell-1} \supseteq \ldots$$

Es ist $M_{n-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}) \simeq T$ einfach, und für $0 \leq j \leq n - 2$ ist

$$\begin{aligned} (M_{j+1} \cap N_{\ell-1})/(M_j \cap N_{\ell-1}) &= (M_{j+1} \cap N_{\ell-1})/(M_j \cap (M_{j+1} \cap N_{\ell-1})) \\ &\simeq (M_{j+1} \cap N_{\ell-1} + M_j)/M_j \subseteq M_{j+1}/M_j, \end{aligned}$$

mit M_{j+1}/M_j einfach. Somit ist obige Kette eine Kompositionsreihe von M_{n-1} der Länge $\leq n-1$. Jedoch ist bereits $M_{n-1} \supsetneq M_{n-2} \supsetneq M_{n-3} \supsetneq \ldots$ eine Kompositionsreihe von M_{n-1} der Länge $n - 1$, also ist nach Induktion auch obige Kette eine Kompositionsreihe der Länge $n - 1$.

Dann ist auch $N_{\ell-1} \supseteq M_{n-1} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-2} \cap N_{\ell-1} \supseteq M_{n-3} \cap N_{\ell-1} \supseteq \ldots$ eine Kompositionsreihe von $N_{\ell-1}$ der Länge $n - 1$, schließlich war auch $N_{\ell-1}/(M_{n-1} \cap N_{\ell-1}) \simeq S$ einfach. Da allerdings $N_{\ell-1} \supseteq N_{\ell-2} \supseteq N_{\ell-3} \supseteq \ldots$ auch eine Kompositionsreihe von $N_{\ell-1}$ der Länge $\ell - 1$, folgt mit Induktion $n - 1 = \ell - 1$. Ebenso folgt, dass die beiden ursprünglichen Kompositionsreihen isomorphe Subfaktoren haben. $\square$

Wir bezeichnen mit $[M : S]$ die Vielfachheit des einfachen Moduls S in den Kompositionsreihen des Moduls M, falls dies wohldefiniert ist.

Bemerkung Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra, e ein primitives idempotent und Ae der zugehörige unzerlegbar projektive Modul. Sei S ein einfacher Modul.

Es ist $Ae/\operatorname{rad}(Ae) = T$ ein einfacher Modul. Falls nun $T \simeq S$ gilt, so existiert eine Surjektion $Ae \twoheadrightarrow Ae/\operatorname{rad}(Ae) = T \simeq S$, d.h. Ae bildet surjektiv auf S ab.

Angenommen, es wäre auch Af unzerlegbar projektiv mit einer Surjektion $Af \twoheadrightarrow S$.

$$\begin{tikzcd}
 & Af \arrow[dl, "\exists"'] \arrow[d, two heads] & \\
Ae \arrow[r, two heads] & S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dann gibt es eine (surjektive) Hochhebung $Af \to Ae \to S$, d.h. $Af \twoheadrightarrow Ae$. Es folgt, dass $Ae \mid Af$. Da aber Af unzerlegbar ist, also $Ae \simeq Af$.

Also: Ein projektiv unzerlegbarer Modul Ae bildet nur auf einen einfachen Modul nichttrivial ab, nämlich auf $Ae/\operatorname{rad}(Ae)$.

Weiterhin existiert ein Isomorphismus von k-Vektorräumen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_A(Ae, S) &\longrightarrow eS \\
(f\colon Ae \to S) &\longmapsto f(e) = f(e^2) = ef(e).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\operatorname{Hom}_A(Ae, S) \neq 0 \Leftrightarrow eS \neq 0$. Somit ist S der einzige einfache Modul mit $eS \neq 0$ genau dann, wenn $S \simeq Ae/\operatorname{rad}(Ae)$.

Ist nun $1_A = e_1 + \ldots + e_\ell + e_{\ell+1} + \ldots + e_n$ eine orthogonale Zerlegung der 1 in primitive Idempotente, so heißen e_i und e_j äquivalent, falls $Ae_i \simeq Ae_j$. Seien nun $e_1, \ldots, e_\ell$ äquivalent zu e. Ist S nun der einfache Modul zu Ae, so gilt

$$S = 1_A \cdot S = (e_1 + \ldots + e_n) \cdot S = e_1S \oplus \ldots \oplus e_\ell S \oplus e_{\ell+1}S \oplus \ldots \oplus e_nS = e_1S \oplus \ldots \oplus e_\ell S.$$

Daher ist wegen ${}_AA = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_\ell \oplus Ae_{\ell+1} \oplus \ldots \oplus Ae_n$ nun

$$\bar{A} = A/\operatorname{rad}(A) = \underbrace{S \oplus \ldots \oplus S}_{\ell\text{-mal}} \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_h,$$

mit $T_i \not\simeq S$.

Ist $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, so ist $0 \to eX \to eY \to eZ \to 0$ eine exakte Sequenz von k-Vektorräumen. Falls $eY \neq 0$, so kommt $S = Ae/\operatorname{rad}(Ae)$ als Kompositionsfaktor in Y vor. Insbesondere ist $eX \neq 0$ oder $eZ \neq 0$, was von beiden der Fall ist, ist jedoch unklar.

6 Morita-Äquivalenzen

Seien A und B Ringe oder Algebren. Wir untersuchen die Frage, wann die Modulkategorien A-$\texttt{Mod}$ und B-$\texttt{Mod}$ äquivalent sind.

Beispiel Sei $A = k$ ein Körper. Dann ist A-$\texttt{Mod} = k$-$\texttt{Vect}$ die Kategorie der k-Vektorräume. Die unzerlegbaren Objekte sind bis auf Isomorphie $A = k$, ebenso die einfachen Objekte $A = k$. Es gilt $\mathrm{End}_A(k) = k$.

Sei nun $B = \mathrm{M}_\ell(k)$ eine Matrixalgebra über k. Dann sind all einfachen Objekte bis auf Isomorphie durch k^ℓ gegeben, und es gilt wieder $\mathrm{End}_B(k^\ell) = k$.

In der Tat sind die (endlichdimensionalen) Modulkategorien äquivalent, es gilt A-$\texttt{mod} \simeq B$-$\texttt{mod}$. Es handelt sich um eine nichttriviale Äquivalenz, insbesondere wird die Dimension der einfachen Moduln nicht erhalten.

6.1 Definition Seien A und B Ringe (oder Algebren). Es heißen A und B *Morita-äquivalent* genau dann, wenn A-$\texttt{Mod} \simeq B$-$\texttt{Mod}$ als Kategorien gilt, d.h. wenn ihre Modulkategorien äquivalent sind.

6.2 Lemma *Eine Äquivalenz $F\colon A$-$\texttt{Mod} \to B$-$\texttt{Mod}$ erhält die Eigenschaften epi, mono, iso, also auch surjektiv, injektiv und bijektiv. F bildet Kerne auf Kerne, Cokerne auf Cokerne und Bilder auf Bilder ab, sowie initiale auf initiale, terminale auf terminale und Nullobjekte auf Nullobjekte ab.*

Beweis. Sei F eine Äquivalenz, $G\colon B$-$\texttt{Mod} \to A$-$\texttt{Mod}$ ein Quasiinverses zu F, sei $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ der zugehörige natürliche Isomorphismus.

Wir zeigen: Ist $f\colon X \to Y$ ein epi, so auch $F(f)$. Seien also $g\colon F(Y) \to Z$ und $h\colon F(Y) \to Z$ gegeben mit $F(f)g = F(f)h$. Zu zeigen ist, dass $g = h$ gilt.

Wir berechnen

$$\begin{array}{llr} & (G\circ F)(f)G(g) = (G\circ F)(f)G(h) & \text{Anwenden von } G \\ \Rightarrow & \eta_X(G\circ F)(f)G(g) = \eta_X(G\circ F)(f)G(h) & \text{Präkomposition mit } \eta_X \\ \Rightarrow & f\eta_Y G(g) = f\eta_Y G(h) & \eta_X \text{ ist natürlich} \\ \Rightarrow & \eta_Y G(g) = \eta_Y G(h) & f \text{ ist epi} \\ \Rightarrow & G(g) = G(h) & \eta_Y \text{ ist iso} \\ \Rightarrow & g = h & G \text{ ist treu.} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} (G\circ F)(X) \arrow[r, "(G\circ F)(f)"] & (G\circ F)(Y) \arrow[r, shift left, "G(g)"] \arrow[r, shift right, "G(h)"'] & G(Z) \\ X \arrow[u, "\eta_X"', "\wr"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "\eta_Y"', "\wr"] & \end{tikzcd}$$

Die Beweise für den anderen Aussagen folgen auf analoge Weise. $\square$

6.3 Lemma *Eine Äquivalenz $F\colon A$-$\texttt{Mod} \to B$-$\texttt{Mod}$ ist exakt, d.h. F bildet exakte Sequenzen in A-$\texttt{Mod}$ auf exakte Sequenzen in B-$\texttt{Mod}$ ab, sowie Produkte auf Produkte und Coprodukte auf* 23.01.2017

Coprodukte, Teilmoduln (also Bilder von Monos) auf Teilmoduln, Quotienten (also Bilder von Epis) auf Quotienten und einfache Moduln auf einfache Moduln.

6.4 Lemma *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien erhalten die Addition von Morphismen, d.h. für alle Objekte X und Y ist*

$$\mathrm{Hom}_A(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(F(X),F(Y)),\ f \longmapsto F(f)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweis. Wir zeigen, dass die Addition von Morphismen kategoriell definiert werden kann. Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_A(X,Y)$.

Erster Schritt: $X \oplus X$ ist ein Biprodukt (d.h. Produkt und Coprodukt).

$$\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X \arrow[ur, dotted, "\exists!\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & X & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[dl, dotted, "\exists!\nabla"'] & \\
X & X \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\iota_1"] & X \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Daher gibt es die Diagonalabbildung $\Delta\colon X \to X \oplus X$ mit $\Delta\pi_1 = \mathrm{id}_X$ und $\Delta\pi_2 = \mathrm{id}_X$ und die Codiagonalabbildung $\nabla\colon X \oplus X \to X$ mit $\iota_1\nabla = \mathrm{id}_X$ und $\iota_2\nabla = \mathrm{id}_X$.

Zweiter Schritt: Betrachte Morphismen $X \oplus X \to Y \oplus Y$. Betrachte dazu $X \oplus X$ zuerst als Coprodukt.

$$\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[dl, dotted, "\exists!h_1"'] & \\
Y & X \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[u, "\iota_1"] & X \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[ll, bend left, "0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \oplus X \arrow[dl, dotted, "\exists!h_2"'] & \\
Y & X \arrow[l, "0"'] \arrow[u, "\iota_1"] & X \arrow[ul, "\iota_2"'] \arrow[ll, bend left, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Somit existiert $h_1\colon X \oplus X \to Y$ mit $\iota_1 h_1 = \alpha$ und $\iota_2 h_1 = 0$ und $h_2\colon X \oplus X \to Y$ mit $\iota_1 h_2 = 0$ und $\iota_2 h_2 = \beta$.

Nun betrachte $Y \oplus Y$ als Produkt.

$$\begin{tikzcd}
& Y \oplus Y \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
X \oplus X \arrow[ur, dotted, "\exists!h"] \arrow[r, "h_1"] \arrow[rr, bend right, "h_2"'] & Y & Y
\end{tikzcd}$$

Daher existiert $h\colon X \oplus X \to Y \oplus Y$ mit $\iota_1 h\pi_1 = \alpha$, $\iota_1 h \pi_2 = 0$, $\iota_2 h \pi_1 = 0$ und $\iota_2 h \pi_2 = \beta$. Wir bezeichnen h aus naheliegenden Gründen mit

$$h =: \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Dritter Schritt: Wir fassen alles zusammen und betrachten

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\ \Delta_X\ } & X \oplus X & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)} & Y \oplus Y & \xrightarrow{\ \nabla_Y\ } & Y \\
x & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} x \\ x \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} \alpha(x) \\ \beta(x) \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \alpha(x) + \beta(x)
\end{array}$$

D.h. durch $\alpha + \beta := \Delta_X \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \nabla_Y$ haben wir die Addition kategoriell definiert. $\square$

6.5 Definition Ein Modul G heißt *Generator* von A-$\texttt{Mod}$ genau dann, wenn für alle $M \in A$-$\texttt{Mod}$ es eine Menge I und einen Epi $\bigoplus_{i\in I} G \twoheadrightarrow M$ gibt.

6.6 Lemma *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien bilden Generatoren auf Generatoren ab.*

6.7 Definition Ein A-Modul P heißt *Progenerator*, falls P endlich erzeugt projektiv und ein Generator ist.

6.8 Lemma *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien bilden endlich erzeugte Moduln auf endlich erzeugte Moduln ab.*

Beweis. Zeige: M ist endlich erzeugt genau dann, wenn jede aufsteigende Kette $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$ von Teilmoduln mit $\bigcup_n M_n = M$ abbricht, d.h. es gibt ein m mit $M = M_m = M_{m+1} = \dots$.

Da Äquivalenzen Teilmoduln erhalten, zeigt dies das Lemma.

Sei einerseits M endlich erzeugt durch $m_1, \dots, m_\ell \in M$ und sei $M = \bigcup_n M_n$ mit $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$. Dann ist $m_1 \in M_{n_1} \dots m_\ell \in M_{n_\ell}$ mit $n_i \in \mathbf{N}$. Sei nun $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_\ell\}$. Dann gilt $m_1, \dots, m_\ell \in M_{n_0}$, also $M_n = M$ für $n \geq n_0$.

Wird andererseits jede Kette stationär, so wähle $m_1 \in M$. Dann ist $M_1 := Am_1 \subseteq M$. Wähle $m_2 \in M \setminus M_1$. Dann ist $M_1 \subseteq M_2 := \langle m_1, m_2\rangle M$. Fahre so weiter fort. Da die Kette abbrechen muss, gilt $M = \langle m_1, \dots, m_n\rangle$, d.h. M ist endlich erzeugt. □

6.9 Korollar *Äquivalenzen zwischen Modulkategorien bilden Progeneratoren auf Progeneratoren ab.*

Beachte, dass $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ im Allgemeinen nur linksexakt ist, d.h. für eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

ist im Allgemeinen nur

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, Z)$$

exakt. Da wir einen Hom-Funktor als Kandidaten für unsere Morita-Äquivalenzen in Betracht ziehen, muss nach folgendem Lemma das M in diesem Fall projektiv sein, um Exaktheit zu gewährleisten.

6.10 Proposition *Es ist* $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ *ein exakter Funktor genau dann, wenn* M *projektiv ist.*

Beweis. Vergleiche Übungsblatt 9, wichtig ist die Surjektivität von $\mathrm{Hom}_A(M, g)$, welche mit der Surjektivität von g durch die Hochhebungseigeschaft über das projektive M folgt. □

Nun suchen wir Kandidaten für Quasiinverse zu Hom-Funktoren. Dabei definieren wir den Begriff der adjungierten Funktoren und definieren das Tensorprodukt von Moduln, welches den gesuchten Kandidaten liefert.

6.11 Definition Seien $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren zwischen Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$. Dann heißt F *linksadjungiert* zu G, bzw. G heißt *rechtsadjungiert* zu F, falls für alle $C \in \mathcal{C}$ und $D \in \mathcal{D}$ es einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, G(D)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), D)$ gibt.

6.12 Definition Sei A ein Ring. Sei $X_A \in \texttt{Mod}$-A, ${}_AY \in A$-$\texttt{Mod}$. Sei $X \times Y$ das kartesische Produkt (als Mengen). Sei Z eine abelsche Gruppe. Eine Abbildung $\varphi\colon X \times Y \to Z$ heißt *A-balanciert*, falls für $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und $a \in A$ gilt 25.01.2017

$$\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y) \qquad \varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$
$$\varphi(xa, y) = \varphi(x, ay).$$

Ein Paar (T,τ) bestehend aus einer abelschen Gruppe $T = X \oplus_A Y$, sodass $\tau\colon X \times Y \to X \oplus Y$ eine A-balancierte Abbildung ist, heißt *Tensorprodukt* von X und Y über A, falls folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Für jede A-balancierte Abbildung $\varphi\colon X \times Y \to Z$ gibt es einen eindeutigen Homomorphismus abelscher Gruppen $f\colon X \otimes_A Y \to Z$ mit $\varphi = \tau f$.

$$\begin{tikzcd}
X_A \times {}_A Y \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
T = X \otimes_A Y \arrow[r, dotted, "\exists! f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

6.13 Proposition *Das Tensorprodukt $X \otimes_A Y$ existiert und ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Beweis. Sei $F := \bigoplus_{X \times Y} \mathbf{Z}$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge $X \times Y$. Diese kommt mit der Injektion $i\colon X \times Y \hookrightarrow F, (x,y) \mapsto (x,y)$.

Sei H die Untergruppe von F erzeugt von Elementen der Form

$$(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y),\ (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2),\ (xa, y) - (x, ay)$$

für $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ und $a \in A$. Sei $T := F/H$ als abelsche Gruppe. Sei $\tau := i\pi$. Dann ist τ eine A-balancierte Abbildung.

Zudem erfüllt (T,τ) die universelle Eigenschaft: Ist $\varphi\colon X \times Y \to Z$ eine A-balancierte Abbildung, so definiere $g\colon F \to Z$ durch $(x,y) \mapsto \varphi(x,y)$. Dann liegt H im Kern von g, also existiert $f\colon T \to Z$ mit $\varphi = \tau f$ und f ist eindeutig mit dieser Eigenschaft. $\square$

Bemerkung Ist (T,τ) ein Tensorprodukt von X und Y, so schreiben wir $x \otimes y := \tau(x,y)$ für $x \in X$ und $y \in Y$. Solche Elemente erzeugen $X \otimes_A Y$, aber nicht jedes Element sieht so aus.

6.14 Lemma *Sei X erzeugt von $x_1, \ldots, x_n$ und Y erzeugt von $y_1, \ldots, y_\ell$. Dann ist jedes Element von $X \otimes_A Y$ eine Summe von Elementen der Form $x_j a \otimes y_k$. Im Fall $A = \mathbf{Z}$, ist jedes Element eine Summe von Elementen der Form $x_j \otimes y_k$.*

Beweis. Für $x \in X$ und $y \in Y$ gibt es $a_j, b_k \in A$ mit $x = \sum_j x_j a_j$ und $y = \sum_k b_k y_k$. Dann ist

$$x \otimes y = \left(\sum_j x_j a_j\right) \otimes \left(\sum_k b_k y_k\right) = \sum_{j,k} x_j (a_j b_k) \otimes y_k. \qquad \square$$

Beispiel Seien $a, b \in \mathbf{N}$. Wir untersuchen $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$. Nach Lemma 6.14 ist $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ erzeugt von $\bar{1} \otimes \bar{1}$, also wieder zyklisch.

Nach dem Euklidischen Algorithmus gibt es $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ mit $d := \mathrm{ggT}(a,b) = \lambda a + \mu b$. Für $m \in \mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ und $n \in \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$ gilt dann

$$md \otimes n = m(\lambda a + \mu b) \otimes n = (\lambda ma \otimes n) + (m\mu b \otimes n) = (\lambda \underbrace{ma}_{=0} \otimes n) + (m\mu \otimes \underbrace{bn}_{=0}) = 0$$

Somit ist die Ordnung von $m \otimes n$ ein Teiler von d. Andererseits betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \\ (x,y) & \longmapsto & xy + d\mathbf{Z}. \end{array}$$

Diese Abbildung ist $\mathbf{Z}$-balanciert, surjektiv und faktorisiert über $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/b\mathbf{Z}$, denn für $n, m \in \mathbf{Z}$ gilt

$$(x + na, y + mb) \mapsto xy + xmb + yna + nmab + d\mathbf{Z} = xy + d\mathbf{Z}.$$

Somit gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$. Insgesamt folgt der Isomorphismus

$$\mathbf{Z}/a\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/b\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}/\operatorname{ggT}(a,b)\mathbf{Z}.$$

6.15 Proposition *Seien A, B, C Ringe und ${}_BX_A$ und ${}_AY_C$ Bimoduln. Dann ist ${}_BX_A \otimes_A {}_AY_C$ ein B-C-Bimodul. Weiterhin gilt ${}_BX_A \otimes_A {}_AA_A \simeq {}_BX_A$ und ${}_AA_A \otimes_A {}_AY_C \simeq {}_AY_C$, sowie für entsprechende Bimoduln $(X_1 \oplus X_2) \otimes Y \simeq X_1 \otimes Y \oplus X_2 \otimes Y$ und $(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z)$.*

Bemerkung Um aus dem Tensorprodukt einen Tensorproduktfunktor zu erhalten, müssen wir auch das Tensorprodukt von Morphismen definieren. Seien also $f\colon X_A \to X'_A$ und $g\colon {}_AY \to {}_AY'$ Homomorphismen.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "\tau"] & X' \times Y' \arrow[d, "\tau'"] \\ X \otimes Y \arrow[r, dotted, "\exists! f\otimes g"] & X' \otimes Y' \end{tikzcd}$$

Für die Existenz von $f \otimes g$ ist also zu zeigen, dass $(f,g)\tau'$ eine A-balancierte Abbildung ist. Allerdings ist zum Beispiel für $x \in X$, $y \in Y$ und $a \in A$

$$\begin{aligned} (xa, y)(f,g)\tau' &= (xaf, yg)\tau' = xaf \otimes yg = (xf)a \otimes yg = xf \otimes a(yg) \\ &= xf \otimes (ay)g = (xf, (ay)g)\tau' = (x, ay)(f,g)\tau'. \end{aligned}$$

Für die Additivitäten ist die Rechnung analog.

6.16 Theorem (Adjunktionsformel) *Seien A und B Algebren (oder Ringe) und M_A, ${}_AN_B$, L_B* 30.01.2017
Moduln. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi\colon \operatorname{Hom}_B(M_A \otimes_A N_B, L_B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(M_A, \operatorname{Hom}_B({}_AN_B, L_B)).$$

D.h. der Tensorproduktfunktor $- \otimes_A {}_AN_B\colon \texttt{Mod-}A \to \texttt{Mod-}B$ ist linksadjungiert zum Hom-Funktor $\operatorname{Hom}_B({}_AN_B, -)\colon \texttt{Mod-}B \to \texttt{Mod-}A$.

Bemerkung Anderere Adjungierte zu $\otimes$ und Hom existieren im Allgemeinen nicht.

Beweis zu Theorem 6.16. Definiere

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \operatorname{Hom}(M \otimes N, L) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, L)) \\ (f\colon M \otimes N \to L) &\longmapsto (\varphi(f)\colon m \mapsto (n \mapsto f(m \otimes n))) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \psi\colon \quad \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, L)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(M \otimes N, L) \\ (g\colon M \to \operatorname{Hom}(N, L)) &\longmapsto (\psi(g)\colon m \otimes n \mapsto g(m)(n)). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Kompositionen von φ mit ψ und umgekehrt.

$$\begin{aligned} (f\colon M \otimes N \to L) &\longmapsto (\varphi(f)\colon m \mapsto (\varphi(f)(m)\colon n \mapsto f(m \otimes n))) \\ &\longmapsto ((\varphi\psi)(f)\colon m \otimes n \mapsto \varphi(f)(m)(n) = f(m \otimes n)) \end{aligned}$$

Somit gilt $\varphi\psi = 1$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} (g\colon M \to \operatorname{Hom}(N, L)) &\longmapsto (\psi(g)\colon m \otimes n \mapsto g(m)(n)) \\ &\longmapsto ((\psi\varphi)(g)\colon m \mapsto ((\psi\varphi)(g)(m)\colon n \mapsto \psi(g)(m \otimes n)) = g(m)(n)). \end{aligned}$$

Somit gilt auch $\psi\varphi = 1$.

Alles Weitere (φ und ψ sind Homomorphismen, Natürlichkeit, etc.) folgt durch analoge Rechnungen. $\square$

6.17 Lemma *Sei $N \in A$-$\mathtt{Mod}$ und seien $M_1, M_2, M_3 \in \mathtt{Mod}$-$A$. Sei*

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Dann ist auch

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M_3 \otimes_A N \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, d.h. der Tensorproduktfunktor ist rechtsexakt.

Beweis. Wir erinnern daran, dass der Hom-Funktor linksexakt ist, d.h.

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

ist exakte genau dann, wenn

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, M_3)$$

exakt ist. Analog gilt, dass eine Sequenz

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

exakte ist genau dann, wenn

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, Y)$$

exakt ist. Wähle nun $Y = \mathrm{Hom}_B(N, X)$ mit $B = \mathrm{End}_A(A_N)$, also N als Bimodul ${}_AN_B$. Dann folgt aus der Exaktheit von

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, \mathrm{Hom}(N, X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, \mathrm{Hom}(N, X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1, \mathrm{Hom}(N, X)).$$

Mit Hilfe der Adjunktionsformel (Theorem 6.16) erhalten wir durch eine Diagrammjagd daraus die Exaktheit von

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3 \otimes N, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2 \otimes N, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_1 \otimes N, X).$$

Doch daraus folgt mit der Linksexaktheit von Hom die Exaktheit von

$$M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0.$$ □

Beispiel Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ die Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Sei $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Betrachte die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow e_2A \simeq \begin{pmatrix} 0 & k \end{pmatrix} \longrightarrow e_1A \simeq \begin{pmatrix} k & k \end{pmatrix} \longrightarrow e_1A/e_2A \longrightarrow 0.$$

Sei $N = Ae_2/Ae_1 \simeq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ k \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $e_2A \otimes_A N \simeq e_2N \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_2, N) \simeq k$ und $e_1A \otimes_A N \simeq e_1A \simeq \mathrm{Hom}_A(Ae_1, N) \simeq 0$. Folglich ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow e_2A \otimes N \simeq k \longrightarrow e_1A \otimes N \simeq 0 \longrightarrow e_1A/r_2A \otimes N = 0 \longrightarrow 0$$

nicht exakt, d.h. der Tensorproduktfuntktor ist im Allgemeinen nicht exakt.

6.18 Definition Ein Modul ${}_A N \in A\text{-}\mathtt{Mod}$ heißt *flach* genau dann, wenn der Funktor $- \otimes_A N$ exakt ist.

6.19 Proposition *Projektive Moduln sind flach.*

Beweis. Es ist $- \otimes_A A \simeq \mathrm{id}$, also ist A flach. Weiterhin ist "flach sein" erhalten unter Summen und Summanden, daher sind alle projektiven Moduln flach. □

Bemerkung Die Umkehrung zu Proposition 6.19 gilt im Allgemeinen nicht, zum Beispiel ist $\mathbf{Q}$ als $\mathbf{Z}$-Modul flach, aber nicht projektiv.

Ist hingegen A eine endlichdimensionale k-Algebra, so sind die endlich erzeugten flachen Moduln gerade die endlich erzeugten projektiven Moduln.

6.20 Theorem (Morita, 1958) *Seien R und S Ringe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *R und S sind Morita-äquivalent, d.h. es gilt $R\text{-}\mathtt{Mod} \simeq S\text{-}\mathtt{Mod}$ als Kategorien.*

(b) *Es gibt einen Progenerator $P \in R\text{-}\mathtt{Mod}$ mit $S = \mathrm{End}_R(P)$.*

(c) *Es gibt einen Progenerator $Q \in \mathtt{Mod}\text{-}R$ mit $S = \mathrm{End}_R(Q)^{\mathrm{op}}$.*

6.21 Korollar *Sei A eine endlichdimensionale k-Algebra. Seien $P_1, \ldots, P_n$ Repräsentanten der Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver A-Moduln, d.h. es gilt $A \simeq P_1^{j_1} \oplus \ldots \oplus P_n^{j_n}$ für gewisse $j_k \in \mathbf{N}$. Dann ist A Morita-äquivalent genau zu allen Ringen der Form $B \simeq \mathrm{End}_A(P_1^{h_1} \oplus \ldots \oplus P_n^{h_n})$ mit $h_k \geq 1$.*

Bemerkung Von A kommen wir zu allen zu A Morita-äquivalenten Ringen durch endlich viele Anwendungen von

- Isomorphe Ersetzung $B \rightsquigarrow B'$ mit $B \simeq B'$.
- Vergrößerung der Form $B \rightsquigarrow \mathrm{M}_n(B)$ für $n \geq 1$.
- Verkleinerung der Form $B \rightsquigarrow eBe$ mit einem Idempotent $e^2 = e$, sodass Be ein Generator von $B\text{-}\mathtt{Mod}$ ist.

Beweis von Theorem 6.20. Zu (a) $\Rightarrow$ (b): Eine Äquivalenz $S\text{-}\mathtt{Mod} \to R\text{-}\mathtt{Mod}$ bildet S auf einen Progenerator P in $R\text{-}\mathtt{Mod}$ ab und es gilt $S \simeq \mathrm{End}_S(S) = \mathrm{Hom}_S(S,S) \simeq \mathrm{Hom}_R(P,P) = \mathrm{End}_R(P)$. 01.02.2017

Zu (b) $\Rightarrow$ (a): Sei ${}_R P \in R\text{-}\mathtt{Mod}$ ein Progenerator mit $\mathrm{End}_R(P) = S$. Dann ist ${}_R P_S$ ein R-S-Bimodul. Damit definieren wir Funktoren $F\colon R\text{-}\mathtt{Mod} \to S\text{-}\mathtt{Mod}$, $F = \mathrm{Hom}_R({}_R P_S, -)$ und $G\colon S\text{-}\mathtt{Mod} \to R\text{-}\mathtt{Mod}$, $G = {}_R P_S \otimes_S -$.

Zu zeigen sind die natürlichen Isomorphismen $F \circ G \simeq \mathrm{id}_{S\text{-}\mathtt{Mod}}$ und $G \circ F \simeq \mathrm{id}_{R\text{-}\mathtt{Mod}}$.

Dazu definiere einerseits $\varphi\colon \mathrm{id}_{S\text{-}\mathtt{Mod}} \to F \circ G$ für $M \in S\text{-}\mathtt{Mod}$ durch

$$\varphi_M\colon M \longrightarrow (F \circ G)(M) = \mathrm{Hom}_R({}_R P_S, {}_R P_S \otimes M),\ m \longmapsto (p \mapsto p \otimes m).$$

Wir müssen zeigen, dass φ natürlich in M ist und alle φ_M Isomorphismen sind. Zur Natürlichkeit sei $f\colon M_1 \to M_2$ und betrachte

$$\begin{array}{ccccccc} M_1 & \xrightarrow{\varphi_{M_1}} & \mathrm{Hom}(P, P \otimes M_1) & \qquad & m_1 & \longmapsto & (p \mapsto p \otimes m) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(1, 1\otimes f)} & & \downarrow & & \downarrow \\ M_2 & \xrightarrow{\varphi_{M_2}} & \mathrm{Hom}(P, P \otimes M_2) & & f(m_1) & \longmapsto & (p \mapsto p \otimes f(m)). \end{array}$$

Damit ist φ eine natürliche Transformation.

Um zu zeigen, dass alle φ_M Isomorphismen sind, betrachte zunächst den Fall $M = S$. In diesem Fall ist $\varphi_S(s) = (p \mapsto p \otimes s)$ für $s \in S$. Doch dies ist gerade der kanonische Isomorphismus $S \simeq \mathrm{Hom}_R(P, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, P \otimes_S S)$. Ebenso ist φ_M ein Isomorphismus für $M = S^\ell$, $\ell \geq 1$.

Für $M = \bigoplus_{i \in I} S$ beachte, dass P endlich erzeugt, d.h. das Bild eines jeden Homomorphismus $P \to \bigoplus_{i \in I} S$ nur endlich viele Summanden trifft. Damit ist auch dieser Fall durch S^ℓ bereits abgedeckt.

Nun sei M ein beliebiger Modul. Wähle eine projektive Präsentation von M der Form

$$S_2 := \bigoplus_{j \in J} S \xrightarrow{\ f\ } S_1 := \bigoplus_{i \in I} S \xrightarrow{\ g\ } M \longrightarrow 0,$$

d.h. die obige Sequenz ist exakt. Dann sind φ_{S_1} und φ_{S_2} Isomorphismen. Betrachte dann das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{S_2}", "\wr"'] & S_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi_{S_1}", "\wr"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_M"] & 0 \\
\mathrm{Hom}(P, P \otimes S_2) \arrow[r, "(1, 1 \otimes f)"] & \mathrm{Hom}(P, P \otimes S_1) \arrow[r, "(1, 1 \otimes f)"] & \mathrm{Hom}(P, P \otimes M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Durch eine Diagrammjagd folgt nun, dass auch φ_M ein Isomorphismus ist.

Andererseits definiere $\psi\colon G \circ F \to \mathrm{id}_{R\text{-}\mathtt{Mod}}$ für $N \in R\text{-}\mathtt{Mod}$ durch

$$\psi_N\colon {}_RP_S \otimes_S \mathrm{Hom}_R({}_RP_S, {}_RN) \longrightarrow N, \ p \otimes f \longmapsto f(p).$$

Nun gehe vor wie bei φ, d.h. zeige, dass ψ natürlich ist, danach die Spezialfälle $N = P$, sowie $N = \bigoplus_{i \in I} P$. Dann wähle wieder eine projektive Präsentation, möglich, da P projektiv ist und erhalte die Aussage erneut durch eine Diagrammjagd.

Zu (a) $\Leftrightarrow$ (c): Benutze $\mathtt{Mod}\text{-}R = R^{\mathrm{op}}\text{-}\mathtt{Mod}$.

Alternativ: ${}_RP_S$ ist ein R-Progenerator für R-`Mod` genau dann, wenn ${}_RP_S$ ein S-Progenerator für `Mod`-S ist (vgl. Übungsblatt 11). □

6.22 Theorem (Satz von Eilenberg und Watts) *Sei R ein Ring und $F\colon R\text{-}\mathtt{Mod} \to \mathtt{Ab}$ ein rechtsexakter, additiver Funktor, der direkte Summen erhält, d.h. $F(\bigoplus_i M_i) \simeq \bigoplus_i F(M_i)$.*

Dann ist F natürlich isomorph zum Tensorfunktor $F(R) \otimes_R -$.

Beispiel Sei $P = Ae$ ein Progenerator mit einem Idempotent $e^2 = e$.

Für einen A-Modul M gilt dann sowohl $\mathrm{Hom}(Ae, M) = eM$, als auch $eA \otimes_A M = eM$.

Exakte Funktoren könne sich (manchmal) sowohl als Hom-Funktor als auch als Tensorfunktor schreiben lassen.

Beweis von Theorem 6.22. Sei $T := F(R)$. Zu zeigen ist, dass T ein R-Rechtsmodul ist und die Existenz eines natürlichen Isomorphismus $T \otimes_R M \to F(M)$. 06.02.2017

Sei $X \in R$-`Mod` und $x \in X$. Definiere die "Rechtsmultiplikation mit x" durch $\alpha_x\colon R \to X$, $r \mapsto rx$. Dies ist additiv und erfüllt für $r, s \in R$ stets $\alpha_x(rs) = rsx = r(sx) = r\alpha_x(s)$, d.h. α_x ist ein R-Linksmodulhomomorphismus. Speziell für $X = R$ bilden für $r \in R$ die Abbildungen α_r gerade die Elemente von $\mathrm{Hom}_R(R, R) = R$. Damit wird R ein R-Rechtsmodul.

Da F ein additiver Funktor ist, ist die Abbildung $R = \mathrm{Hom}_R(R, R) \to \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ab}}(F(R), F(R))$ additiv. Insbesondere wird $T = F(R)$ ein R-Rechtsmodul durch $xr := F(\alpha_r)(x)$ für $x \in T$ und $r \in R$.

Nun definiere $\mu_M\colon F(R)\otimes_R M\to F(M)$ durch

$$\begin{array}{rcl} F(R)\times M & \longrightarrow & F(M)\\ (x,m) & \longmapsto & F(\alpha_m)(x). \end{array}$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung R-balanciert ist. Additivität ergibt sich aus der Additivität des Funktors F. Weiterhin ist für $x\in F(R)$, $m\in M$ und $r\in R$

$$\begin{aligned} (xr,m) &\mapsto F(\alpha_m)(xr)=F(\alpha_m)(F(\alpha_r)(x))\\ (x,rm) &\mapsto F(\alpha_{rm})(x)=F(\alpha_r\alpha_m)(x)=F(\alpha_m)(F(\alpha_r)(x)). \end{aligned}$$

Damit ist obige Abbildung R-balanciert und die Existenz von $\mu_M\colon F(R)\otimes_R M\to F(M)$ als R-Modulhomomorphismus ist gezeigt.

Zur Natürlichkeit von μ_M, sei $f\colon M\to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Wir müssen die Kommutativität des folgenden Diagramms nachweisen.

$$\begin{tikzcd} F(R)\otimes_R M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] & F(M) \arrow[d, "F(f)"] \\ F(R)\otimes_R N \arrow[r, "\mu_N"] & F(N) \end{tikzcd}$$

Einerseits ist für $x\in F(R)$ und $m\in M$

$$(\mu_M F(f))(x\otimes m)=F(f)(F(\alpha_m)(x))=(F(\alpha_m)F(f))(x)=F(\alpha_m f)(x),$$

andererseits ergibt sich

$$((\mathrm{id}\otimes f)\mu_N)(x\otimes m)=\mu_N(x\otimes f(m))=F(\alpha_{f(m)})(x).$$

Doch nun ist für $r\in R$ stets $(\alpha_m f)(r)=f(rm)=rf(m)=\alpha_{f(m)}(r)$, somit kommutiert obiges Diagramm.

Es bleibt zu zeigen, dass alle μ_M Isomorphismen sind. Dies folgt jedoch wie im Beweis zum Satz von Morita (Theorem 6.20), da F rechtsexakt ist und mit direkten Summen vertauscht. $\square$

7 Ext^1

Wir betrachten kurze exakte Sequenzen von R-Moduln

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0.$$

Wir bezeichnen dies als *Erweiterung von Z durch X*. Dabei sind X und Z fest, das Y darf variieren.

7.1 Definition Zwei Erweiterungen

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{g_1} Z \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{g_2} Z \longrightarrow 0$$

von Z durch X heißen *äquivalent*, falls es einen Modulhomomorphismus $\xi\colon Y_1 \to Y_2$ gibt, sodass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, equal] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\xi"] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_2"] & Y_2 \arrow[r, "g_2"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bemerkung So ein ξ wie in Definition 7.1 muss ein Isomorphismus sein. Dies folgt durch eine Diagrammjagd.

ξ ist injektiv. Sei $y_1 \in Y_1$ mit $\xi(y_1) = 0$. Dann ist $0 = (\xi g_2)(y_1) = (g_1 \operatorname{id}_Z)(y_1)$, also $g_1(y_1) = 0$. Daher ist $y_1 \in \operatorname{Im}(f_1)$, also gibt es $x_1 \in X$ mit $f_1(x_1) = y_1$. Somit ist

$$0 = \xi(y_1) = (f_1\xi)(x_1) = (\operatorname{id}_X f_2)(x_1) = f_2(x_1).$$

Da f_2 injektiv ist, ist $x_1 = 0$ und daher $y_1 = f_1(x_1) = 0$, also ist ξ injektiv.

ξ ist surjektiv. Sei $y_2 \in Y_2$. Da g_1 surjektiv ist, gibt es $y_1 \in Y_1$ mit $g_1(y_1) = g_2(y_2)$. Dann ist aber

$$g_2(y_2 - \xi(y_1)) = g_2(y_1) - (\xi g_2)(y_1) = g_2(y_2) - g_1(y_1) = 0,$$

also $y_2 - \xi(y_1) \in \operatorname{Kern}(g_2) = \operatorname{Im}(f_2)$. Somit gibt es $x \in X$ mit $f_2(x) = y_2 - \xi(y_1)$. Doch dann ist

$$\xi(f_1(x) + y_1) = f_2(x) + \xi(y_1) = y_2 - \xi(y_1) + \xi(y_1) = y_2,$$

also ist ξ surjektiv.

7.2 Lemma *Äquivalenz von Erweiterungen ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Reflexivität folgt mit $\xi = \operatorname{id}$, Symmetrie mit ξ^{-1} (vgl. vorherige Bemerkung) und Transitivität durch Komposition der ξ. □

Beispiel Sei $Q = (1 \longrightarrow 2)$ der Köcher mit zwei Punkten und einem Pfeil. Wir betrachten gewisse Erweiterungen von kQ-Moduln.

Wir betrachten Erweiterungen von $Z = (k \longrightarrow 0)$ durch $X = (0 \longrightarrow k)$.

Wir betrachten Äquivalenzen zwischen einer Erweiterungen in einer Familie, die für $\lambda, \mu \neq 0$ gegeben ist durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Dazu betrachte folgendes Diagramm mit $\nu, \rho \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "1"] \arrow[dd, bend left, "\rho"] & k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "1"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "1"] & k \arrow[r] \arrow[dd, bend left, "\rho"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\nu"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es ergeben sich die Bedingungen $\rho = \mu$ und $\nu = \rho\lambda$, also $\nu = \mu\lambda$. Somit sind die Äquivalenzklassen parametrisiert durch $\nu \in k \setminus \{0\}$.

Eine andere Familie von Erweiterungen von Z durch X ist für $\lambda, \mu \neq 0$ gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "0"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Hier betrachte das folgende Diagramm mit $\alpha, \beta \neq 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "0"] \arrow[dd, bend left, "\alpha"] & k \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "1"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dd, bend left, "1"] & k \arrow[r] \arrow[dd, bend left, "\beta"] & 0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "0"] & k \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r, "1"] & k \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Es ergeben sich die Bedingungen $\lambda\beta = 1$ und $\mu = \alpha$. Da α und β frei wählbar sind, sind alle Erweiterungen dieser Form äquivalent.

Insgesamt gibt es also $k \setminus \{0\}$ viele Erweiterungen der ersten Art und genau eine Erweiterung der zweiten Art. Fassen wir Erweiterungen der zweiten Art als 0 auf, so sind alle Erweiterungen von Z durch X durch den k-Vektorraum k parametrisiert.

Beispiel Wir suchen eine Äquivalenz ξ zwischen den folgenden beiden Erweiterungen von $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ durch $\mathbf{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "3"] \arrow[d, equal] & \mathbf{Z} \arrow[r, "1 \mapsto \bar{1}"] \arrow[d, "\xi"] & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \arrow[r, "3"] & \mathbf{Z} \arrow[r, "1 \mapsto \bar{2}"] & \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Zur Kommutativität des rechten Quadrats muss $\xi = 1$ gelten, doch dann kann das rechte Quadrat nicht kommutieren. Also sind die beiden Erweiterungen nicht äquivalent.

Dies zeigt, dass die Gleichheit bei X und bei Z in Definition 7.1 eine starke Bedingung ist.

7.3 Definition Die Menge aller Äquivalenzklassen von Erweiterungen von Z durch X wird mit $\operatorname{Ext}^1(Z,X)$ bezeichnet.

Aufgaben: $\operatorname{Ext}^1(Z,X)$ soll eine abelsche Gruppe und $\operatorname{Ext}^1(Z,X)$ funktoriell werden.

7.4 Definition Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(a) Gegeben sei ein Diagramm in $\mathcal{C}$ der Form

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$

Ein *Pullback* oder *Faserprodukt* ist ein Tripel (P, p_1, p_2) bestehend aus einem Objekt P und Morphismen $p_1\colon P \to X$ und $p_2\colon P \to Y$ mit $p_1 s = p_2 t$, sodass für alle Objekte A und Morphismen $f_1\colon A \to X$ und $f_2\colon A \to Y$ mit $f_1 s = f_2 t$ es genau einen Morphismus $g\colon A \to P$ gibt mit $f_1 = g p_1$ und $f_2 = g p_2$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

Das Quadrat aus P, Y, X und Z heißt *Pullback-Quadrat* und wird häufig gekennzeichnet durch

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$

(b) Gegeben sei ein Diagramm in $\mathcal{C}$ der Form 08.02.2017

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \\ Z. & \end{tikzcd}$$

Ein *Pushout* oder *Cofaserprodukt* ist ein Tripel (Q, q_1, q_2) bestehend aus einem Objekt Q und Morphismen $q_1\colon Y \to Q$ und $p_2\colon Z \to Q$ mit $s q_1 = t q_2$, sodass für alle Objekte B und Morphismen $f_1\colon Y \to B$ und $f_2\colon Z \to B$ mit $s f_1 = t f_2$ es genau einen Morphismus $g\colon Q \to B$ gibt mit $f_1 = q_1 g$ und $f_2 = q_2 g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ Z \arrow[r, "q_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & Q \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Das Quadrat aus X, Y, Z und Q heißt *Pushout-Quadrat* und wird häufig gekennzeichnet durch

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near end] & Y \arrow[d, "q_1"] \\ Z \arrow[r, "q_2"] & Q \end{tikzcd}$$

Beispiele

- Sei Z ein terminales Objekt. Dann ist ein Pullback zum Diagramm
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z. \end{tikzcd}$$
gegeben durch das Produkt $P := X \times Y$ mit den Projektionen $p_1\colon X \times Y \to X$ und $p_2\colon X \times Y \to Y$. Das Pullback-Quadrat kommutiert dann, da Z terminal ist, d.h. da es nur einen Morphismus $X \times Y \to Z$ gibt.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & X \times Y \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

- Betrachte die Kategorie $\mathcal{C} = \texttt{Set}$, darin Teilmengen $X, Y \subseteq Z$ mit den Inklusionen $X \hookrightarrow Z$ und $Y \hookrightarrow Z$. Dann ist ein Pullback gegeben durch den Schnitt $P := X \cap Y$. Für eine weitere Menge A mit Abbildungen $f_1\colon A \to X$ und $f_2\colon A \to Y$ ist wegen $f_1(a) = f_2(a) \in Z$ für $a \in A$ stets $f_1(a), f_2(a) \in X \cap Y$, daher existiert $g\colon A \to X \cap Y$ mit $g(a) = f_1(a) = f_2(a)$.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, hook] \\ & X \arrow[r, hook] & Z \end{tikzcd}$$

- In der algebraischen Topologie besagt der *Satz von Seifert-van Kampen*, dass die Fundamentalgruppe π_1 gewisse Pushouts in $\texttt{Top}$ auf Pushouts in $\texttt{Group}$ abbildet.
- Betrachte nun die Kategorie $\mathcal{C} = R\text{-}\texttt{Mod}$. Seien Moduln X, Y und Z und Modulhomomorphismen $s\colon X \to Z$ und $t\colon Y \to Z$ gegeben.
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "t"] \\ X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$
Wähle $P := \{(x, y) \in X \oplus Y : s(x) = t(y)\}$. Seien $p_1\colon P \to X$ und $p_2\colon P \to Y$ die Projektionen auf den ersten bzw. zweiten Summanden. Dann gilt $p_1 s = p_2 t$.

  Ist nun A ein weiterer Modul mit Homomorphismen $f_1\colon A \to X$ und $f_2\colon A \to Y$ mit $f_1 s = f_2 t$, so kommutiert
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & X \oplus Y \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} s \\ -t \end{smallmatrix}\right)}"] & Z. \end{tikzcd}$$
  Daher existiert $g\colon A \to P$ als Faktorisierung über den Kern von $\left(\begin{smallmatrix} s \\ -t \end{smallmatrix}\right)$.
$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] \arrow[drr, bend left, "f_2"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "t"] \\ & X \arrow[r, "s"] & Z \end{tikzcd}$$

- Betrachte wieder die Kategorie $\mathcal{C} = R\text{-}\mathtt{Mod}$. Seien Moduln X, Y und Z und Modulhomomorphismen $s\colon X \to Y$ und $t\colon X \to Z$ gegeben.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"] & Y \\
Z &
\end{tikzcd}$$

Wähle $Q := (Y \oplus Z)/\langle s(x) - t(x)\colon x \in X\rangle$. Seien $q_1\colon Y \to Q$ und $q_2\colon Z \to Q$ die Morphismen gegeben durch Inklusion und Restklassenabbildung. Dann gilt $sq_1 = tq_2$.

Ist nun B ein weiterer Modul mit Homomorphismen $f_1\colon Y \to Q$ und $f_2\colon Z \to Q$ mit $sf_1 = tf_2$, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{(s,-t)}"] \arrow[rr, bend right, "0"'] & Y \oplus Z \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}"] & B
\end{tikzcd}$$

Daher existiert $g\colon Q \to B$ als Faktorisierung über den Cokern von $(s, -t)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
Z \arrow[r, "q_2"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & Q \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start] \arrow[dr, dotted, "\exists! g"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

Insgesamt: In R-`Mod` (und auch in R-`mod`) existieren Pullback und Pushout.

Bemerkung (Eigenschaften von Ext^1)

(1) Repräsentiert

$$\xi\colon 0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

die Äquivalenzklasse einer Erweiterung von B durch A und ist $f\colon C \to B$ ein Modulhomomorphismus, so definiere eine Abbildung $f\colon \operatorname{Ext}^1(B, A) \to \operatorname{Ext}^1(C, A)$ durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & X \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner", very near start] & C \arrow[r] \arrow[u, "f"] & 0,
\end{tikzcd}$$

d.h. die Äquivalenzklasse der Erweiterung in der ersten Zeile wird auf die Äquivalenzklasse Erweiterung in der zweiten Zeile abgebildet. Hierbei ist P ein Pullback.

(2) Repräsentiert

$$\xi\colon 0 \longrightarrow A \longrightarrow X \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

die Äquivalenzklasse einer Erweiterung von B durch A und ist $g\colon A \to D$ ein Modulhomomorphismus, so definiere eine Abbildung $g\colon \operatorname{Ext}^1(B, A) \to \operatorname{Ext}^1(B, D)$ durch

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

d.h. die Äquivalenzklasse der Erweiterung in der ersten Zeile wird auf die Äquivalenzklasse Erweiterung in der zweiten Zeile abgebildet. Hierbei ist Q ein Pushout.

(3) Wir definieren eine Addition in Ext^1, die sogenannte *Baer-Summe*. Dazu seien zwei Äquivalenzklassen in $\mathrm{Ext}^1(B,A)$ repräsentiert durch

$$\begin{aligned} \xi\colon 0 &\xrightarrow{f_1} A \longrightarrow X \xrightarrow{g_1} B \longrightarrow 0 \\ \eta\colon 0 &\xrightarrow{f_2} A \longrightarrow Y \xrightarrow{g_2} B \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Durch Summation und Bildung von Pullback P und Pushout Q erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, wobei Δ die Diagonal- und ∇ die Codiagonalabbildung bezeichnet.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 0 & f_2 \end{pmatrix}"] & X\oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}"] & B\oplus B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A\oplus A \arrow[u, equal] \arrow[d, "\nabla"] \arrow[r] & P \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\llcorner", very near start] & B \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[d, equal] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[ul, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Die Äquivalenzklasse der Erweiterung von B durch A in der letzten Zeile bildet die Bear-Summe $\xi+\eta \in \mathrm{Ext}^1(B,A)$.

(4) Die Bear-Summe macht $\mathrm{Ext}^1(B,A)$ zu einer abelschen Gruppe mit neutralem Element repräsentiert durch die zerfallende Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{(1,0)} A\oplus B \xrightarrow{\binom{0}{1}} B \longrightarrow 0.$$

(5) Zudem kann eine externe Multiplikation definiert werden, das sogenannte *Yoneda-Produkt*: Sind zwei Erweiterungen der Form

$$\begin{aligned} \xi\colon 0 &\xrightarrow{f_1} A \longrightarrow X \xrightarrow{g_1} B \longrightarrow 0 \ \in \mathrm{Ext}^1(B,A) \\ \eta\colon 0 &\xrightarrow{f_2} B \longrightarrow Y \xrightarrow{g_2} C \longrightarrow 0 \ \in \mathrm{Ext}^1(C,B) \end{aligned}$$

gegeben, so definiere durch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & X \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & Y \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & B \arrow[ur, hook] \arrow[dr] & & & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

eine kurze exakte Sequenz der Länge 4. Damit kann eine Gruppe $\mathrm{Ext}^2(C,A)$ definiert werden, zusammen mit einer Multiplikation $\mathrm{Ext}^1(B,A)\times\mathrm{Ext}^1(C,B)\to\mathrm{Ext}^2(C,A)$.

7.5 Proposition *Sei $P\in R$-$\mathtt{Mod}$. Dann sind äquivalent.*

(a) *P ist projektiv.*

(b) $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ *ist exakt.*

(c) $\mathrm{Ext}^1_R(P,-)=0$.

Ist A eine endlichdimensionale k-Algebra, so gilt

$$A \text{ ist halbeinfach} \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ext}^1_A(-,-)=0 \text{ auf } A\text{-}\mathtt{mod}.$$

Bemerkung (Beziehung zwischen Hom und Ext^1) Sei

$$\xi\colon 0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

ein Repräsentant $\xi \in \mathrm{Ext}^1(Z,X)$ und U ein Modul. Wir erhalten eine Abbildung $\mathrm{Hom}(U,Z) \to \mathrm{Ext}^1(U,X)$ durch $\alpha \mapsto \alpha(\xi)$, vgl. das folgende Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[u, equal] & P \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\llcorner"] & U \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & 0
\end{tikzcd}$$

Analog erhalten wir für einen Modul W eine Abbildung $\mathrm{Hom}(X,W) \to \mathrm{Ext}^1(Z,W)$ durch $\beta \mapsto \beta(\xi)$, siehe folgendes Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r] & Q \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(U,-)$ auf ξ erhalten wir somit die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1(U,X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(U,Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(U,Z)
\end{tikzcd}$$

beziehungsweise durch Anwenden von $\mathrm{Hom}(-,W)$ die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z,W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,W) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1(Z,W) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(Y,W) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X,W).
\end{tikzcd}$$

Damit "repariert" Ext die mangelnde Exaktheit von Hom. Analog lässt sich ein Funktor Tor_1 definieren, der die Exaktheit des Tensorprodukts $\otimes$ repariert.

Mit Hilfe dieser exakten Sequenzen lässt sich $\mathrm{Ext}^1(Z,W)$ (oft) berechnen. Dazu wähle eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

mit Y projektiv. Dann ergibt sich die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Z,W) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(Y,W) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Hom}(X,W) \arrow[dll, rounded corners] \\
 & \mathrm{Ext}^1(Z,W) \arrow[r] & \underbrace{\mathrm{Ext}^1(Y,W)}_{=0} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(X,W).
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $\mathrm{Ext}^1(Z,W) = \mathrm{Hom}(X,W)/\operatorname{Im}(\varphi)$.

Beispiel Sei $Q = (1 \xrightarrow{\alpha} 2)$ und betrachte die Köcheralgebra kQ, sowie deren Rechtsmoduln. Seien $S_1 = (k \longrightarrow 0)$ und $S_2 = (0 \longrightarrow k)$ die beiden einfachen Moduln.

Wegen $S_2 = e_2A$ ist S_2 projektiv, daher gilt $\mathrm{Ext}^1(S_2,S_1) = 0$. Wir wollen $\mathrm{Ext}^1(S_1,S_2)$ bestimmen.

Beachte, dass kQ isomorph ist zur Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Wir wählen folgende exakte Sequenz.

$$0 \longrightarrow S_2 = e_2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \longrightarrow e_1 A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow S_1 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

Dies gibt die lang exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S_1, S_2) = 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(e_1 A, S_2) = 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(S_2, S_2) \simeq k \arrow[dll, rounded corners] \\ & \mathrm{Ext}^1(S_1, S_2) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(e_1 A, S_2) = 0. & \end{tikzcd}$$

Es folgt, dass $\mathrm{Ext}^1(S_1, S_2) \simeq k$.