Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. Sei $F : Grp \to Set$, der Vergissfunktor, der aus einer Gruppe eine Menge macht und aus einem Gruppenhomomorphismus eine Abbildung von Mengen. Ist F darstellbar, d.h. gibt es eine Gruppe G, so dass F natürlich isomorph ist zu $Hom(G, -)$?
   Ist der Vergissfunktor $V : Ring \to Set$ darstellbar?

2. Sei A eine Algebra und P ein A-Modul. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (I) P ist projektiv.

   (II) Jede kurze exakte Sequenz $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ mit $Z \simeq P$ zerfällt, d.h. die Abbildungen in der Sequenz sind split Mono bzw. split Epi.

   (III) Der Funktor $Hom_A(P, -)$ bildet kurze exakte Sequenzen von A-Moduln in kurze exakte Sequenzen von abelschen Gruppen ab.

3. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über einem Körper k und $D := Hom_k(-, k)$ die k-Dualität. Ein Modul $M \in A - mod$ heißt *injektiv*, wenn $D(M) \in mod - A$ projektiv ist.

   (a) Charakterisieren Sie injektive Moduln durch eine Hochhebungseigenschaft analog zur Definition von projektiven Moduln.

   (b) Bestimmen Sie einen injektiven A-Modul M, so dass die Objekte in $add(M)$ genau die endlich-dimensionalen injektiven A-Moduln sind.

   (c) Sei A nun eine Wegealgebra kQ. Bestimmen Sie die unzerlegbaren injektiven A-Moduln. Welche unzerlegbaren injektiven Moduln sind gleichzeitig auch projektiv?

   (d) Ist $\mathbb{Q}$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul (wobei injektiv durch die Hochhebungseigenschaft aus (a) definiert wird)?

4. Sei K der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{Q}[x]$. Der Ring A wird definiert als Menge $\{r(x) + us(x) \mid r(x), s(x) \in K\}$. Elemente in K werden wie in K multipliziert, außerdem gilt $u^2 = 0$ und $r(x) \cdot u := ur(x^2)$. Ist A eine K-Algebra? Bestimmen Sie das Jacobson-Radikal J von A, alle Rechtsideale und alle Linksideale. Ist jedes Rechtsideal auch ein Linksideal und umgekehrt?

5. Sei $I \neq 0$ ein zweiseitiges Ideal in einer endlich-dimensionalen Algebra A, so dass I kein nilpotentes Ideal ungleich Null enthält. Zeigen Sie, dass I eine halbeinfache Algebra (mit Eins) ist und ein algebra-direkter Summand von A.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`