Blatt 8 Mittwoch, 21.Dezember 2016

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. Sei k ein Körper und $A := \prod_{n\in\mathbf{N}} k = k^{\mathbb{N}}$. Bestimmen Sie alle unzerlegbaren direkten Summanden des regulären A-Moduls. Ist ${}_AA$ eine direkte Summe von unzerlegbaren Summanden?

2. Sei A eine endlich-dimensionale k-Algebra mit Linksmoduln $M_1, \dots, M_n$, so dass jeder unzerlegbare A-Modul zu genau einem M_j isomorph ist.

   Sei $\Lambda(A) := End_A(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n)$.

   (a) Bestimmen Sie $\Lambda(A)$ für A halbeinfach.

   (b) Für welche Algebren A gilt $A \simeq \Lambda(A)$?

   (c) Bestimmen Sie $\Lambda(A)$ für A die Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Vergleichen Sie $\Lambda(A)$ mit der Algebra B der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen.

   (d) Vergleichen Sie die Kategorie der endlich-dimensionalen $\Lambda(A)$-Moduln mit der Kategorie $(A - mod) - mod$ der (kovarianten oder kontravarianten) Funktoren von $A - mod$ in die Kategorie der k-Vektorräume.

3. Sei A eine endlich-dimensionale k-Algebra und M ein A-Modul. Eine (eventuell unendliche) exakte Sequenz $\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ heißt *projektive Auflösung* von M.

   Zeigen Sie, dass jeder A-Modul M eine projektive Auflösung besitzt.

   Bestimmen Sie möglichst kurze projektive Auflösungen in den folgenden Situationen:

   (a) A halbeinfach und M unzerlegbar.

   (b) A die Algebra der oberen 2×2-Dreiecksmatrizen und M unzerlegbar.

   (c) A die Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen und M unzerlegbar.

   (d) $A = k[x]/(x^2)$ und $M = k$.

   (e) A die endlich-dimensionale Wegealgebra eines Köchers und M einfach.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`