Blatt 7 Mittwoch, 7.Dezember 2016

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. (a) Bestimmen Sie die Epimorphismen in der Kategorie der torsionsfreien abelschen Gruppen. (Dabei heißt eine, additiv geschriebene, Gruppe G torsionsfrei, wenn 0 das einzige Element endlicher Ordnung ist.)

   (b) Zeigen Sie, dass in der Kategorie der Gruppen jeder Epimorphismus surjektiv ist.

2. Bestimmen Sie in der Kategorie Set_* der Mengen mit Basispunkten und basispunkterhaltenden Abbildungen die initialen und terminalen Objekte. Zeigen Sie, dass Kerne existieren. Sind Epimorphismen durch ihre Kerne eindeutig bestimmt?

3. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, und $f, g : X \to Y$ zwei Morphismen.

   (a) Ein Morphismus $e : E \to X$ heißt Differenzkern (Equaliser) von f und g, falls $ef = eg$ gilt und jeder Morphismus $d : D \to X$ mit $df = dg$ eindeutig über E faktorisiert. Zeigen Sie, dass Differenzkerne, falls existent, eindeutig sind bis auf Isomorphie.
   Existieren Differenzkerne in den Kategorien Set (Mengen), Vec (K-Vektorräume) und $A - Mod$?
   Wann ist e ein Monomorphismus?
   Wann ist e ein Epimorphismus?
   Sei $X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} X$ eine Faktorisierung von 1_X. Zeigen Sie, dass a ein Differenzkern ist.

   (b) Definieren Sie Differenzkokerne (Coequaliser). Bestimmen Sie die Differenzkokerne, falls existent, in den Kategorien der Mengen, der Gruppen und der abelschen Gruppen.

   (c) Gibt es Differenzkerne oder Differenzkokerne in den folgenden Kategorien oder Spezialfällen davon: G eine Gruppe als Kategorie mit einem Objekt, Q ein Köcher.

4. Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie.

   (a) Zeigen Sie, dass jeder Monomorphismus ein Kern ist und jeder Epimorphismus ein Cokern.

   (b) Zeigen Sie, dass ein Morphismus f genau dann ein Isomorphismus ist, wenn f sowohl ein Monomorphismus als auch ein Epimorphismus ist.

Bitte wenden ...

5. Wahr oder falsch?

   (a) Die Kategorie *Ring* der Ringe mit Eins hat ein initiales Objekt.
   (b) Die Kategorie *Ring* hat ein terminales Objekt.
   (c) Die Kategorie *Rng* der Ringe (nicht notwendig mit Identität) hat ein initiales Objekt.
   (d) Die Kategorie *Rng* hat ein terminales Objekt.
   (e) Die Kategorie *Rig* der Ringe (nicht notwendig mit negativen Elementen) hat ein initiales Objekt.
   (f) Die Kategorie *Rig* hat ein terminales Objekt.
   (g) Die Kategorie Fld der Köper hat ein initiales Objekt.
   (h) Die Kategorie Fld hat ein terminales Objekt.
   (i) Die Kategorie $Fld - p$ der Körper der Charakteristik p hat ein initiales Objekt.
   (j) Die Kategorie $Fld - p$ hat ein terminales Objekt.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`