Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. Beweis oder Gegenbeispiel:

   (a) Seien A und B Algebren, $\varphi : A \to B$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus, $\psi : B \to A$ ein injektiver Algebrenhomomorphismus und $\psi\varphi = id_B$. Dann existiert eine Algebra C, so dass $A = B \oplus C$ als Algebren.

   (b) Sei A eine einfache Algebra. Dann ist das Zentrum von A ein Körper.

   (c) Sei A eine Algebra, M ein halbeinfacher A-Linksmodul und $E = End_A(M)$. Dann ist M_E halbeinfach.

   (d) Sei A eine Algebra, M ein A-Linksmodul und $E = End_A(M)$. Wenn M_E halbeinfach ist, dann ist auch ${}_AM$ halbeinfach.

   (e) Sei $X \subset Y$ ein Teilmodul und Y/X halbeinfach. Dann ist $rad(Y) \subset X$.

2. Sei A ein Ring und $rad(A)$ der Durchschnitt aller Annulatoren von einfachen A-Linksmoduln. Mit $BMrad(A)$ wird der Durchschnitt der maximalen *zweiseitigen* Ideale von A bezeichnet.

   (a) Bestimmen Sie $BMrad(A)$ für die Algebra A der oberen Dreiecksmatrizen über einem Körper k.

   (b) Zeigen Sie, dass jedes maximale zweiseitige Ideal eines Rings A der Annullator eines einfachen A-Moduls ist. Folgern Sie daraus, dass $rad(A) \subset BMrad(A)$ gilt.

   (c) Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über einem Körper k. Zeigen Sie, dass $rad(A) = BMrad(A)$ gilt.

   (d) Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum abzählbarer Dimension und $E = End_k(V)$. Ist V ein einfacher E-Modul?
   Zeigen Sie, dass E genau drei verschiedene zweiseitige Ideale besitzt. Welches davon ist der Annulator von V, welches der Schnitt aller Annulatoren einfacher Moduln und was ist $BMrad(E)$?

   (e) Sei e_n für $n \geq 1$ eine Basis von V, sei $f_1 \in E$ definiert durch $f_1(e_n) := e_{2n}$ und f_2 durch $f_2(e_n) := e_{2n-1}$. Zeigen Sie, dass jedes Element von E eine eindeutige E-Linearkombination von f_1 und f_2 ist. Folgern Sie daraus, dass es Isomorphismen von E-Moduln gibt: $E \simeq E \oplus E$ und sogar $E^a \simeq E^b$ für alle $a, b \geq 1$.

Bitte wenden ...

3. Sei $R := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ stetig und $f(0) = f(1)\}$, mit punktweiser Addition und Multiplikation. Sei $M := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ stetig und$f(0) = -f(1)\}$. Prüfen Sie nach, dass M ein R-Linksmodul ist.

   (a) Zeigen Sie, dass M nicht zyklisch ist. Folgern Sie ${}_RM \not\cong {}_RR$.

   (b) Betrachten Sie $R \oplus R$ und $M \oplus M$ als Mengen von Funktionen von $[0,1]$ in die reelle Ebene $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$. Mit r_α wird die Rotation um den Winkel α in der reellen Ebene bezeichnet. Zeigen Sie, dass $(f, g) \mapsto (x \mapsto r_{\pi x}(f(x), g(x))$ einen Isomorphismus von R-Moduln von $M \oplus M$ auf $R \oplus R$ definiert.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`