Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. Ein Linksmodul M heißt *zyklisch*, wenn M von einem Element erzeugt ist, das heißt, es gibt ein $m \in M$ mit ${}_AM = A \cdot m$. Beweis oder Gegenbeispiel:

   (a) Jeder einfache Modul ist zyklisch.

   (b) Jeder zyklische Modul ist unzerlegbar.

   (c) Jeder Modul ist zyklisch.

   (d) Jeder zyklische Modul ist ein Quotient des regulären Moduls ${}_AA$.

   (e) Wenn m einen zyklischen Modul M erzeugt, dann ist $Ann(M) = Ann(m)$, wobei $Ann(m) = \{a \in A : a \cdot m = 0\}$.

2. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Zeigen Sie:

   (a) Der reguläre Modul ${}_AA$ ist halbeinfach genau dann, wenn jeder endlich-dimensionale A-Modul M halbeinfach ist.

   (b) Sei M ein endlich-dimensionaler A-Modul. Dann ist M halbeinfach genau dann, wenn für jeden Teilmodul X von M ein Teilmodul Y von M existiert, so dass $M = X \oplus Y$.

   (c) Sei M ein endlich-dimensionaler A-Modul. Dann ist M halbeinfach genau dann, wenn M die (nicht notwendig direkte) Summe seiner einfachen Teilmoduln ist.

   (d) Sei M ein endlich-dimensionaler A-Modul. Dann ist M halbeinfach genau dann, wenn für jeden Teilmodul X die Inklusion $i : X \to M$ ein Rechtsinverses besitzt, das heisst, es gibt ein $f : M \to X$ mit $if = id_X$.

   (e) Sei M ein endlich-dimensionaler A-Modul. Dann ist M halbeinfach genau dann, wenn für jeden Teilmodul X die Projektion $p : M \to M/X$ ein Linksinverses besitzt, das heisst, es gibt ein $g : M/X \to M$ mit $gp = id_{M/X}$.

   (f) Muss M halbeinfach sein, wenn jeder halbeinfache Teilmodul $X \subset M$ auch ein Quotient von M ist?

3. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra und M ein A-Modul. Ein Teilmodul $X \subset M$ heißt *klein* in M, wenn für alle Teilmoduln $Y \subset M$ gilt: Aus $X + Y = M$ folgt $Y = M$. Zeigen Sie, dass X klein in M ist, genau dann wenn $X \subset rad(M)$ gilt.

4. Sei A ein Ring. Ein A-Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette von Teilmoduln stationär wird. M ist *noethersch* genau dann, wenn jede aufsteigende Kette von Teilmoduln stationär wird. Der Ring A heißt links-/rechts-artinsch oder -noethersch, wenn der reguläre Links-/Rechtsmodul diese Eigenschaft hat. Artinsch/noethersch bedeutet bei Ringen, dass die Bedingung auf beiden Seiten erfüllt ist.

Bitte wenden ...

(a) Geben Sie Beispiele an für: A artinsch, A linksartinsch, aber nicht rechtsartinsch, A noethersch, aber nicht artinsch, A weder artinsch noch noethersch, A links-noethersch, aber nicht rechtsnoethersch. (Hinweis: Wenn R und S Ringe sind und ${}_RM_S$ ein Bimodul, dann ist $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ ein Ring.)

(b) Zeigen Sie, dass bei Ringen noethersch aus artinsch folgt. (Hinweis: Betrachten Sie die Ideale $rad(A)^n$.)

(c) Sei p eine Primzahl. Der Ring $R := \mathbb{Z}(\frac{1}{p})$ besteht aus allen rationalen Zahlen, deren Nenner eine Potenz von p ist (mit Exponent $k \geq 0$). Ist der $\mathbb{Z}$-Modul $M := R/\mathbb{Z}$ artinsch? Ist M noethersch?

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`