Blatt 4 Mittwoch, 16. November 2016

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. Sei A die k-Algebra der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen.

   (a) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Teilmoduln des regulären Moduls ${}_A A$.

   (b) Bestimmen Sie alle Teilmoduln des regulären Moduls ${}_A A$.

2. Bestimmen Sie das Radikal jeder der folgenden Algebren:
   $A_1 = k[x]/(x^n)$ für $n \geq 2$.
   $A_2 = k[x,y]/(x^2, y^2, xy)$.
   $A_3 = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ (als $\mathbb{Z}$-Algebra).
   $A_4 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (als $\mathbb{Z}$-Algebra).
   $A_5 = \mathbb{C}$ (als $\mathbb{R}$-Algebra).

3. Seien A und B endlich-dimensionale Algebren. Beweis oder Gegenbeispiel:

   (a) Wenn A eine Teilalgebra von B ist, dann gilt $rad(A) = rad(B) \cap A$.

   (b) Wenn $\varphi : A \to B$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus ist, dann gilt $rad(A) = \varphi^{-1}(rad(B))$.

   (c) Wenn $\varphi : A \to B$ ein injektiver Algebrenhomomorphismus ist, dann gilt $\varphi(rad(A)) \subset rad(B)$.

   (d) Wenn $\varphi : A \to B$ ein injektiver Algebrenhomomorphismus ist, dann gilt $\varphi(rad(A)) \supset rad(B)$.

   (e) Sei $A = kG$ die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe und $g \in G$. Dann gilt $g \notin rad(A)$.

   (f) Sei $I \subset rad(A)$ ein zweiseitiges Ideal in A. Dann gilt $rad(A/I) = rad(A)/I$.

   (g) Sei $e = e^2 \in A, e \neq 0$. Dann gilt $e \notin rad(A)$.

   (h) Sei $a \in rad(A)$. Dann ist a nilpotent, das heisst, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n = 0$.

   (i) Sei a nilpotent. Dann ist $a \in rad(A)$.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`