

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

1. Sei k ein Körper und Q der Kroneckerköcher $1 \rightleftarrows 2$ mit den (von $a, b \in k$ abhängi-

$$\text{gen) Darstellungen } V_a = k \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{a} \end{array} k \text{ und } W_b = k^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}} \end{array} k^2 .$$

- (a) Bestimmen Sie $\text{Hom}_{kQ}(X, Y)$ für alle $X, Y \in \{V_a, W_b\}$, auch als Ring beziehungsweise als Bimodul. Welche Abbildungen sind Isomorphismen, injektiv oder surjektiv?

(b) Was ändert sich, wenn V_a ersetzt wird durch $U_c = k^3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}} \end{array} k^3$?

2. Sei k ein Körper. Sei Q_1 der Köcher $\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$, Q_2 der Köcher $\bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ und Q_3 der Köcher $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$.

- (a) Geben Sie für jeden der drei Köcher alle unzerlegbaren Darstellungen an (bis auf Isomorphie) sowie deren Dimensionsvektoren.
 (b) Sei $q : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}$ die quadratische Form, die (x, y, z) abbildet auf

$$x^2 - xy + y^2 - yz + z^2.$$

Zeigen Sie, dass diese Form positiv definit ist und bestimmen Sie ihre positiven Wurzeln, das heißt die Vektoren mit nichtnegativen Einträgen, die auf 1 abgebildet werden. Was hat q mit den Köchern Q_1, Q_2, Q_3 zu tun?

- (c) Geben Sie in jedem Fall alle Homomorphismen zwischen den unzerlegbaren Darstellungen an und entscheiden Sie, welche davon Kompositionen aus anderen Homomorphismen sind.
 (d) Vergleichen Sie die Darstellungstheorie der drei Köcher. Gibt es Bijektionen zwischen den unzerlegbaren Darstellungen von zwei dieser Köcher, die dann zu (mit Komposition verträglichen) Bijektionen zwischen den Homomorphismenmengen erweitert werden können?

Webseite zur Vorlesung:

<http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t>