Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

(1) (a) Geben Sie eine treue Darstellung der Algebra $k[x]/(x^2)$ in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, k)$ an.
(b) Geben Sie eine treue Darstellung der Algebra $k[x]/(x^3)$ in $\mathrm{Mat}(3 \times 3, k)$ an.
(c) Fortsetzung?

(2) Sei A die k-Algebra $k[x, y]/(x^2, y^2, xy)$. Ist der Rechtsmodul $D({}_AA)$ isomorph zum regulären Rechtsmodul A_A?

(3) (a) Sei A eine Algebra, $e = e^2 \in A$ ein Idempotent. Seien X und Y A-Linksmoduln und $\varphi : X \to Y$ ein Homomorphismus von Linksmoduln. Zeigen Sie, dass φ durch Einschränkung eine lineare Abbildung $eX \to eY$ definiert, wobei $eX = \{ex : x \in X\}$ ist.
(b) Sei A die Algebra der oberen 3×3 Dreiecksmatrizen. Wählen Sie eine Zerlegung der Eins $1 = e_1 + e_2 + e_3$ und zerlegen Sie damit die Moduln ${}_AA$ und A_A. Bestimmen Sie alle Homomorphismen zwischen den drei Summanden von ${}_AA$. Welche der drei Summanden sind einfach, halbeinfach oder unzerlegbar?
(c) Bestimmen Sie alle unzerlegbaren direkten Summanden M von ${}_AA$, so dass $D({}_AM)$ isomorph zu einem direkten Summanden von A_A ist.

(4) Sei A eine k-Algebra und seien $e = e^2, f = f^2$ Idempotente in A. Verwenden Sie den Isomorphismus $\mathrm{Hom}_A(A, A) \simeq A$, um $\mathrm{Hom}_A(Ae, Af)$ zu bestimmen.

(5) Sei $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $B = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Verwenden Sie die $\mathbb{Q}$-Vektorraumstruktur von A und B, um auf $M := \mathbb{Q}^2$ eine A-Links- und eine B-Rechtsmodulstruktur zu definieren. Geben Sie jeweils die darstellenden Matrizen an. Zeigen Sie dann, dass M dadurch kein A-B-Bimodul wird.
Gibt es eine A-B-Bimodulstruktur auf M?

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`