Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie und homologische Algebra 1

(1) (a) Sei A eine Algebra und $J \neq A$ ein zweiseitiges Ideal. Zeigen Sie, dass jede Darstellung von A/J auch eine Darstellung von A definiert.
(b) Sei A eine Algebra und $B \subset A$ eine Teilalgebra. Zeigen Sie, dass jede Darstellung von A auch eine Darstellung von B definiert.
(c) Sei A die Algebra der oberen 3×3 Dreiecksmatrizen. Bestimmen Sie möglichst viele unzerlegbare Darstellungen von A.

(2) (a) Sei Q der Köcher mit einem Punkt 1 und einem Pfeil $\alpha : 1 \to 1$, und k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimmen Sie alle unzerlegbaren Darstellungen von kQ.
(b) Sei $A = k[x]/(x^n)$. Bestimmen Sie alle unzerlegbaren Darstellungen von A.

(3) Sei Q der Köcher $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ und A die Wegealgebra kQ. Geben Sie einen injektiven Algebrenhomomorphismus $\varphi : A \to Mat(n \times n, k)$ mit möglichst kleinem n an.

(4) (a) Sei k ein Körper der Charakteristik 0 und $F := k\langle x, y\rangle$ die Algebra der nichtkommutativen Polynome in x und y, also $xy \neq yx$; der kommutative Polynomring $k[x, y]$ ist die Quotientenalgebra $F/(xy - yx)$. F wird auch *freie Algebra* in x und y genannt. Wieviele Isomorphieklassen eindimensionaler Darstellungen hat F?
(b) Sei $W := F/(xy - yx - 1)$.
Erklären Sie, warum x manchmal als d/dy geschrieben wird. Hat W eine Darstellung mit $V = k[y]$?
Zeigen Sie, dass W eine einfache Algebra ist. Hat W endlich-dimensionale Darstellungen ungleich 0?

Die Übungen finden erstmals am Freitag, 28.10.2016 statt, im Seminarraum V57.7.527, von 8:00 bis 9:30.

Webseite zur Vorlesung:
`http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/DThHomAlg1/DarstThHomAlg1.t`