Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Gruppenübung 9

Aufgabe 34

Gegeben sind die Vektorfelder $V_k : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$, $V_k(x, y) = \big(L_k(x, y), M_k(x, y)\big)$:

a) $L_1(x, y) = 2, \quad M_1(x, y) = 0.$

b) $L_2(x, y) = 2\,y, \quad M_2(x, y) = 0.$

c) $L_3(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad M_3(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

d) $L_4(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}, \quad M_4(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und Divergenz jedes Vektorfeldes.

Aufgabe 35 (schriftlich)

a) Verifizieren Sie den Gaußschen Integralsatz für den Zylinder $Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq z \leq 5, x^2 + y^2 \leq 9\}$ und das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, V(x, y, z) := 4(x + y, y + z, z + x)$.

b) Verifizieren Sie den Stokesschen Integralsatz für die Fläche $Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 9\}$ und das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, V(x, y, z) := 9(y, z, x)$.

c) Beweisen Sie für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Formel: $\operatorname{rot}(fV) = \operatorname{grad}(f) \times V + f \operatorname{rot}(V)$.

Aufgabe 36

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen und $V, W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder mit $V = (V_1, V_2, V_3)$. Beweisen Sie die Formeln:

a) $\operatorname{grad}(fg) = \operatorname{grad}(f)g + f \operatorname{grad}(g)$.

b) $\operatorname{div}(V \times W) = \langle \operatorname{rot}(V), W\rangle - \langle V, \operatorname{rot}(W)\rangle$.

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(V)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(V)) - \Delta(V)$, wobei hier $\Delta(V) := (\Delta(V_1), \Delta(V_2), \Delta(V_3))$.

Aufgabe 37

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beweisen Sie: Für jede Orthonormalbasis $v_1, v_2, ..., v_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt $\Delta(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \partial^2_{v_k}(f)$, wobei ∂_{v_i} die Richtungableitung in Richtung v_i bezeichnet.

Informationen:

- Eine Lösung der schriftlichen Aufgabe 35 des aktuellen Blatts wird in der Vortragsübung am 13. Januar vorgestellt.
- Im Januar und Februar werden **Sprechstunden zur Prüfungs-Vorbereitung** stattfinden, in denen Fragen zur Höheren Mathematik 3 gestellt werden können. Die Termine dieser Sprechstunden werden in der ersten Vorlesung am 7. Januar sowie auf der Webseite noch bekannt gegeben werden.

Informationen für Studierende der Elektrotechnik:

- Die letzten Übungsgruppen und die letzte prüfungsrelevante Vorlesung der Höheren Mathematik 3 für Studierende der Elektrotechnik finden am Montag, dem **21. Dezember**, statt.
- Das aktuelle Blatt 9 ist das letzte Übungsblatt, welches für die Zulassung zur Prüfung für Studierende der Elektrotechnik relevant ist.

Informationen für Studierende aller anderen Studiengänge:

- Die erste Vorlesung im neuen Jahr: 7. Januar 2016.
  Die ersten Gruppenübungen: 11. Januar 2016.
  Die erste Vortragsübung: 13. Januar 2016.