
Gruppenübung 8

Aufgabe 30 (schriftlich)

Seien h und r positive reelle Zahlen.

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der folgenden Körper:

i) eines Zylinders $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2, 0 \leq z \leq h\}$.

ii) eines Kegels $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 (1 - \frac{z}{h})^2, 0 \leq z \leq h\}$.

iii) des Durchschnitts $Z_1 \cap Z_2$ der zwei Zylinder

$Z_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq r^2\}$ und $Z_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq r^2\}$.

b) Berechnen Sie die Oberflächenintegrale $\int_{F_k} g_k d\sigma$ für die folgenden Flächen F_k und Skalarfelder g_k :

i) $F_1 = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 \mid x + y + z = 1\}$ und $g_1(x, y, z) = xy$.

ii) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $g_2(x, y, z) = z$.

Aufgabe 31

Sei r eine positive reelle Zahl und K die Kugel $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$.

a) Bestimmen Sie den Oberflächeninhalt von K .

b) Sei $r = 2$ und L der Zylinder $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$.

Skizzieren Sie $K \setminus L$ und bestimmen Sie den Oberflächeninhalt von $K \setminus L = \{(x, y, z) \in K \mid (x, y, z) \notin L\}$.

Aufgabe 32

Seien r, R positive reelle Zahlen mit $r < R$.

Sei $S = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ und $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(u, v) = \begin{pmatrix} (r \sin(u) + R) \cos(v) \\ (r \sin(u) + R) \sin(v) \\ r \cos(u) \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche mit Parameterdarstellung (f, S) .

Aufgabe 33

Welche der folgenden Funktionen $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind harmonisch? Welche können als Realteil einer holomorphen Funktion aufgefasst werden? Geben Sie eine solche holomorphe Funktion gegebenenfalls an.

a) $f_1(x, y) = x^2 - y^2$.

b) $f_2(x, y) = x + \sin(xy)$.

c) $f_3(x, y) = 5e^x \sin(y)$.