Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Höhere Mathematik 3 für el, kyb, mecha, phys

WS 2015/2016

Gruppenübung 7

Aufgabe 26 (schriftlich)

a) Verifizieren Sie den Integralsatz von Green für das Vektorfeld $V(x,y) = (8xy - x^2, x + y^2)$ und den kompakten Bereich B, der von den Kurven $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird.

b) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein in beide Richtungen projizierbarer Standardbereich. Zeigen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Green folgende Aussagen:

   i) Für die Fläche F von B gilt $F = \frac{1}{2} \int_{\partial B} -y\,dx + x\,dy$.

   ii) Für den geometrischen Schwerpunkt $S = (a,b)$ von B (zur Definition, siehe Aufgabe 17) gilt: $a = \frac{1}{2F} \int_{\partial B} x^2\,dy$ und $b = -\frac{1}{2F} \int_{\partial B} y^2\,dx$.

   iii) Sei nun B die kompakte Fläche, die von den Kurven $\gamma_1(t) = (t, 0)$ und $\gamma_2(t) = (2\pi - t + \sin(t), 1 - \cos(t))$, für $t \in [0, 2\pi]$, begrenzt wird. Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt von B.

Aufgabe 27

Gegeben sei die Menge $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 - y^2\}$. Bestimmen Sie die Tangentialebene in einem gegebenen Punkt aus M und einen dazu senkrechten Einheitsvektor.

Aufgabe 28

Seien $x, z : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen.
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ die Kurve $\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$ mit $\gamma'(t) \neq 0$ und $x(t) > 0$ für $t \in [a,b]$.
Sei $D = [a,b] \times [0, 2\pi]$ und $F : D \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(t,\phi) = (x(t)\cos(\phi), x(t)\sin(\phi), z(t))$ für $(t,\phi) \in D$.

a) Zeigen Sie, dass $F(D)$ durch Drehung der Kurve γ um die z-Achse entsteht.

b) Finden Sie eine Kurve γ dieser Form, so dass das Bild $F(D)$ die Oberfläche eines Torus beschreibt.

c) Sei nun $\gamma(t) = (r\sin(t), 0, r\cos(t))$ für ein reelle Zahl $r > 0$ und $t \in [a,b] = [0,\pi]$. Welche Fläche beschreibt $F(D)$ in diesem Fall? Bestimmen Sie auch die Tangentialebene und einen dazu senkrecht stehenden Einheitsvektor für jeden Punkt auf der Fläche.

Aufgabe 29

a) Berechnen Sie das Vektorprodukt der Vektoren $(1, 2, 3)$ und $(2, 3, 2)$.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Vektorprodukt nicht assoziativ ist.

c) Zeigen Sie, dass zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ genau dann linear abhängig sind, wenn $x \times y = 0$ gilt.

Zeigen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$:

d) $x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0$.

e) x, y und z sind genau dann linear unabhängig, wenn die drei Vektoren $x \times y$, $y \times z$ und $z \times x$ linear unabhängig sind.