Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Höhere Mathematik 3 für el, kyb, mecha, phys

WS 2015/2016

Gruppenübung 6

Aufgabe 22 (schriftlich)

a) Skizzieren Sie die Kurven γ_i und berechnen Sie die Bogenlänge von γ_i :

   i) $\gamma_1 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = e^{-3t}(\cos(t), \sin(t))$.

   ii) $\gamma_2 : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2(t) = 2t(\cos(t), \sin(t), \frac{1}{3}\sqrt{8t})$.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale der Vektorfelder
$V_i : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$ entlang der Kurven $\gamma_i : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$:

   i) Für $V_1(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x)$ und $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

   ii) Für $V_2(x, y) = (x^3 y, xy^3)$ und $\gamma_2(t) = (t, t^2)$.

c) Sei $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $V(x, y, z) = 4(y^2 \cos(x), 2y \sin(x) + e^{2z}, 2ye^{2z})$.
Entscheiden Sie, ob V ein Gradientenfeld ist, und geben Sie gegebenenfalls ein Potential an.

Aufgabe 23

Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $V(x, y) = (g(y), h(x))$, ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein Potential von V.

Aufgabe 24

a) Sei $V_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $V_1(x, y) = 3(x^2 - y, y^2 + x)$.

   i) Hat V_1 ein Potential?

   ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes V_1 entlang einer Geraden von $(2, 2)$ nach $(0, 1)$.

b) Sei $V_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $V_2(x, y, z) = 9(2xz^3 + 6y, 6x - 2yz, 3x^2z^2 - y^2)$.

   i) Hat V_2 ein Potential?

   ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfeldes V_2 entlang der Kurve
   $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\,\sin^{13}(e^{\cos(e^t)}),\, e^{-t^{1000}},\, \cos(\cos(\cos(e^t)))\,)$.

Aufgabe 25

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$.
Zeigen Sie, dass der Graph von f nicht rektifizierbar ist.

Abgabe: 30. November 2015 in den Übungen