Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Gruppenübung 5

Aufgabe 18 (schriftlich)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit Spaltenvektoren $a_1, ..., a_n$.

a) Sei $d \in \mathbb{R}^n$ und $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Abbildung $T(x) = Ax + d$. Sei $T^{-1}(B)$ eine kompakte und Jordan-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie folgende Identität für eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\int\limits_{T^{-1}(B)} f(Ax+d)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\det(A)|} \int\limits_{B} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

b) Zeigen Sie unter obigen Voraussetzungen $\mathrm{vol}(T^{-1}(B)) \cdot |\det(A)| = \mathrm{vol}(B)$.

Verwenden Sie die Formel $\mathrm{vol}(T^{-1}(B)) \cdot |\det(A)| = \mathrm{vol}(B)$ um folgende Teilaufgaben zu lösen:
Sei $P_n = \{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$.

i) Berechnen Sie das Volumen der Menge P_2.

ii) Berechnen Sie das Volumen der Menge P_n für $n \geq 3$.

iii) Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids E, gegeben durch $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 \leq 1\}$, wobei a, b und c positive reelle Zahlen sind.

Aufgabe 19

a) Bestimmen Sie die zwei Schnittpunkte der Kurven $y^2 = 1 - x$ und $y^2 = 1 + x$. Bestimmen Sie den Inhalt der durch die beiden Kurven $y^2 = 1 - x$ und $y^2 = 1 + x$ eingeschlossenen Fläche F zwischen den zwei Schnittpunkten. Skizzieren Sie die Fläche F.

b) Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 2y \leq x \leq 2,\ x \leq y^2 + 1\}$. Skizzieren Sie die Menge B und bestimmen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ über B für beide Integrationsreihenfolgen.

Aufgabe 20

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Gegeben ist die Menge

$T_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für } i = 1, 2, ..., n \text{ und } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1\}.$

a) Berechnen Sie das Volumen von T_1, T_2 und T_3 und skizzieren Sie diese Mengen.

b) Berechnen Sie das Volumen von T_n für jedes $n \geq 4$.

Aufgabe 21

Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $0 < a < b$. Sei $P : I \times (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ die durch $P(r, \phi, \psi) = (r\cos(\phi)\cos(\psi),\ r\sin(\phi)\cos(\psi),\ r\sin(\psi))$ definierte Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass P stetig differenzierbar und injektiv ist und *bestimmen Sie das Bild von P als Teilmenge von* $K(I) := \{\ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ||v|| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \in I\}$. Skizzieren Sie $K(I)$ für $I = (1, 2)$.

b) Berechnen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix von P in jedem Punkt des Definitionsbereiches von P.

c) Sei $c \geq 0$ und $w = (0, 0, c) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie folgendes Integral in Abhängigkeit von a, b und c:

$$\int_{K(I)} \frac{1}{||v - w||} \, \mathrm{d}(x, y, z).$$