Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Gruppenübung 4

Aufgabe 14 (schriftlich)

a) Berechnen Sie folgende Integrale:

i) $\int\limits_B xy \,\mathrm{d}(x,y)$, für $B = [1,2] \times [2,3]$.

ii) $\int\limits_I \frac{1}{(x+y)^2} \,\mathrm{d}(x,y)$, für $I = [1,2] \times [4,5]$.

iii) $\int\limits_L g(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$, für $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq x\}$ und

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{4\sin(x)}{x} & \text{für } (x,y) \in L \text{ mit } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Seien $l, r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$ und $l > 0$.

i) Berechnen Sie das Volumen eines Kreiszylinders
$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r,\ z \in [0,l]\}$. Skizzieren Sie Z.

ii) Berechnen Sie das Volumen von $Z_1 \cap Z_2$,
wobei $Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq r\}$ und $Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + z^2 \leq r\}$.
Skizzieren Sie $Z_1 \cap Z_2$.

Aufgabe 15

Sei K die Halbkugel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$, und sei L der Zylinder $L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0,2]\}$.
Bestimmen Sie das Volumen von $K \backslash L = \{(x,y,z) \in K \mid (x,y,z) \notin L\}$.
Skizzieren Sie $K \backslash L$.

Aufgabe 16

Sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} & \text{für } 0 < x < y \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2} & \text{für } 0 < y < x \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int\limits_{[0,1]} \Big(\int\limits_{[0,1]} f(x,y) \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}y$.

b) $\int\limits_{[0,1]} \Big(\int\limits_{[0,1]} f(x,y) \,\mathrm{d}y \Big) \,\mathrm{d}x$.

Entscheiden Sie, ob folgendes Integral existiert:

c) $\int\limits_{[0,1]^2} f(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$.

Aufgabe 17

Sei B eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^2$ mit Flächeninhalt $vol(B) = F > 0$. Der *geometrische Schwerpunkt von B* ist definiert als der Punkt $S = (a, b)$, mit $a := \frac{1}{F} \int\limits_B x \,\mathrm{d}(x,y)$ und $b := \frac{1}{F} \int\limits_B y \,\mathrm{d}(x,y)$.

a) Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt einer halben Kreisscheibe $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r,\ y \geq 0\}$ mit Radius $r > 0$. Skizzieren Sie H und den Schwerpunkt.

b) Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt des Dreiecks $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$. Skizzieren Sie D und den Schwerpunkt.