Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Gruppenübung 3

Aufgabe 9

Gegeben seien die stetigen und 2π-periodischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bzw. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Fourierreihen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ bzw. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von c_k und d_k die Fourierkoeffizienten folgender Funktionen:

a) $h_1(t) = af(t) + bg(t)$ für zwei komplexe Zahlen a, b.

b) $h_2(t) = \overline{f(t)}$.

c) $h_3(t) = f(-t)$.

d) $h_4(t) = f(t + a)$ für $a \in \mathbb{R}$.

e) $h_5(t) = e^{int} f(t)$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 10

Gegeben sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin \mathbb{Z}$.

a) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodisch fortgesetzten Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = \cos(ax)$.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 10 a) folgende Darstellung des Tangens für $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{\tan(\pi a)} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right)$$

.

Aufgabe 11

Gegeben sei eine auf $[0, 2\pi)$ unendlich oft differenzierbare und 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die auf $\mathbb{R}$ stetig sei. Es sei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$ die Fourierreihe von f.

(a) Berechnen Sie die Fourierreihe für die k-te Ableitung $f^{(k)}$ für $k \geq 1$.

(b) Zeigen Sie für jedes $n \geq 1$, dass die Folge $a_k := k^n \cdot c_k$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 12 (schriftlich)

a) Bestimmen Sie die Fourierreihen der folgenden reell- bzw. komplex-wertigen Funktionen:

   i) $f_1(x) = (\frac{x}{\pi})^3 - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi)$.

   ii) $f_2(x) = e^{ix} \, |\pi - x|$ für $x \in [0, 2\pi)$.

   iii) $f_3(x) = -e^{\frac{ix}{2}} \, (\pi - \operatorname{sgn}(x) \, x)$ für $x \in [-2\pi, 2\pi)$, wobei

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   i) Gegeben seien zwei stetig differenzierbare Funktionen f und g auf $[0, 2\pi)$. Wenn die Fourierkoeffizienten von f mit den Fourierkoeffizienten von g übereinstimmen, dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi)$.

   ii) Gegeben seien zwei Funktionen f und g auf $[0, 2\pi)$. Wenn die Fourierkoeffizienten von f mit den Fourierkoeffizienten von g übereinstimmen, dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi)$.

   iii) Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein Polynom P so, dass die Ungleichung $|f(x) - P(x)| < \frac{1}{2}$ für alle $x \in (-1, 1)$ gilt.