Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Gruppenübung 12

Aufgabe 46

a) Berechnen Sie das Kurvenintegral der Funktion $f(z) = 2z^2 + 4$ über den Kreis mit Radius 1 und dem Mittelpunkt i.

b) Finden Sie zwei Kurven γ_1 und γ_2 mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so dass $\int_{\gamma_1} \overline{z}\,dz \neq \int_{\gamma_2} \overline{z}\,dz$.

c) Zeigen Sie, dass das Integral $I(a) := \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{a+ix}} dx$ unabhängig von $a \in \mathbb{R}$ ist und berechnen Sie den Wert von $I(a)$.
(Hinweis: Berechnen Sie das Kurvenintegral der ganzen Funktion e^{e^z} über ein geeignetes Rechteck.)

Aufgabe 47 (schriftlich)

Sei $\gamma_{a,r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_{a,r}(t) = a + re^{it}$. Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel:

a) $\displaystyle\int_{\gamma_{i,1}} \frac{e^z}{z^2+1}\,dz$

b) $\displaystyle\int_{\gamma_{0,2}} \frac{\sin(z)}{z+i}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z^4-1}\,dz$

d) $\displaystyle\int_{\gamma_{1,1}} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$

Aufgabe 48

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\mathrm{Re}(f'(z)) > 0$ für alle $z \in G$.

a) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

b) Sei nun $G := \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(z) < 0\}$ und $f(z) = 2(z + e^z) + 9$. Ist f injektiv?

Aufgabe 49

Sei M eine positive reelle Zahl und $n \geq 0$ eine natürliche Zahl.

a) Sei f eine ganze Funktion mit $|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Muss f dann ein Polynom vom Grad $\leq n$ sein?

b) Sei f eine ganze Funktion mit $Re(f(z)) + Im(f(z))^2 \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Muss f dann konstant sein?

Informationen:

- Aufgabe 47 ist die letzte schriftliche Aufgabe.
- Das letzte Übungsblatt erscheint nächsten Montag, 25. Januar, und wird nur Votieraufgaben enthalten.
- Die letzten Übungsgruppen finden am Montag, dem 1. Februar statt.