Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Gruppenübung 11

Aufgabe 43 (schriftlich)

Stellen Sie für die Funktionale V_i die Euler-Lagrange Differentialgleichungen auf und lösen Sie diese:

a) $V_1(u) = 7\int_a^b x + u(x)^2 + 3\,u'(x)\,\mathrm{d}x.$

b) $V_2(u) = \int_a^b 24\,x\,u(x) + 2(u'(x))^2\,\mathrm{d}x.$

c) $V_3(u) = \int_a^b u(x) + x\,u'(x)\,\mathrm{d}x.$

Aufgabe 44

Sei $M := \{f \in C_1([-1,1],\mathbb{R}) | f(1) = 1, f(-1) = -1\}$.
Sei $V : M \to \mathbb{R}$ das Funktional $V(u) := \int_{-1}^1 x^2\,u'(x)^2\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie, dass $\inf\{V(u)|u \in M\} = 0$ gilt. Gibt es ein $f \in M$ mit $V(f) = 0$?

Aufgabe 45

Seien $P = (0,0)$ und $Q = (a,b)$ zwei Punkte in der x-z-Ebene mit $a > 0 > b$. Wir nehmen an, dass die Schwerkraft in negative z-Richtung wirkt. Eine *Brachystochrone* ist eine Bahn von P nach Q, entlang welcher ein Massenpunkt *kürzeste Fallzeit* hat.
Sei $I = (0,a) \subset \mathbb{R}$ und $M = \{\ u \in C^1(I,\mathbb{R}) \mid u(x) < 0$ für alle $x \in I\ \}$. Eine Brachystochrone kann als eine Kurve $\{\ (x, u(x)) \mid x \in I\ \}$ beschrieben werden, wobei $u \in M$ die Fallzeit

$$V(u) = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (u'(x))^2}{-u(x)}}\,\mathrm{d}x$$

minimiert. Zeigen Sie:

a) Es gibt ein $r > 0$, so dass **für alle $\mathbf{x} \in (\mathbf{0}, \mathbf{a})$** gilt:

$$-u(x) \cdot \big(1 + u'(x)^2\big) = 2\,r \tag{1}$$

b) Die Funktion $\varphi : (0,a) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\varphi(x) = \arccos\big(\frac{u(x)}{r} + 1\big)$ ist wohldefiniert.

c) Aus (1) folgt $\big(r\,\varphi'(x) \cdot (1 - \cos\varphi(x))\big)^2 = 1$.

d) Unter der zusätzlichen Bedingung $\varphi'(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,a]$, hat die Umkehrfunktion von φ die Darstellung $x(\varphi) = r\,(\varphi - \sin\varphi) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

e) Es gilt $u(x(\varphi)) = r\,(\cos\varphi - 1)$.

f) Seien $\mathbf{B}(\varphi) = (\mathbf{x}(\varphi), \mathbf{u}(\mathbf{x}(\varphi)))$, $K(\varphi) = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ und $M(\varphi) = B(\varphi) - K(\varphi)$. Skizzieren Sie $K(\varphi), M(\varphi)$ und $B(\varphi)$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 46

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \mathrm{Re}(z)$. Berechnen Sie $\int_{\gamma_i} f(z)\,dz$ für die Kurven γ_i:

a) $\gamma_1 =$ Strecke von 0 nach $1 + i$.

b) $\gamma_2 = \gamma_2' \cup \gamma_2''$, wobei

- $\gamma_2' =$ Strecke von 0 nach $\sqrt{2}$.
- $\gamma_2'' =$ Kreisbogen von $\sqrt{2}$ nach $1 + i$ mit Mittelpunkt 0 und Radius $\sqrt{2}$.

c) $\gamma_3 =$ Rand des Rechtecks mit den Ecken 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2} + i$ und i.

Ist f eine ganze Funktion?