Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Höhere Mathematik 3 für el, kyb, mecha, phys

WS 2015/2016

Gruppenübung 10

Aufgabe 38

Seien $n \geq 1$, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) Zeigen Sie $T^{-1}e^A T = e^{T^{-1}AT}$.

b) Beweisen Sie: Hat A die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$,
so hat e^A die Eigenwerte $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n}$.

Aufgabe 39

Berechnen Sie e^{A_i}:

a) $A_1 = 1$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix}$, für $t \in \mathbb{R}$.

d) $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 40 (schriftlich)

a) Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'(t) = Ay(t)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Seien $n \geq 1$ und $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

b) Finden Sie Matrizen A und B mit $e^A e^B \neq e^{A+B}$.

c) Beweisen Sie $e^A e^B = e^{A+B}$, falls $AB = BA$.

d) Zeigen Sie, dass e^A invertierbar ist.

e) Gibt es Matrizen A und B mit $AB \neq BA$ und $e^A e^B = e^{A+B}$?

Aufgabe 41

a) Sei $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $f(A) = e^A$. Ist f injektiv? Ist f surjektiv?

b) Sei $g : \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $g(A) = e^A$.

   i) Ist g injektiv?

   ii) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist.

Aufgabe 42

Sei $M := \{f \in C^1([-1,1],\mathbb{R}) | f(-1) = 0, f(1) = 1\}$ und $V : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $V(u) := \int_{-1}^{1} u(x)^2(2x - u'(x))^2 \,\mathrm{d}x$.
Zeigen Sie, dass $\inf\{V(u) | u \in M\} = 0$ und geben Sie ein $u \in M$ mit $V(u) = 0$ an.