Steffen König
Wassilij Gnedin
René Marczinzik

Höhere Mathematik 3 für el, kyb, mecha, phys

WS 2015/2016

Gruppenübung 1

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen, welche die Gleichung $z^7 = 4$ erfüllen.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ holomorph ist.

c) Gegeben sei die Teilmenge $X := \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0\}$ von $\mathbb{C}$ und die Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Zeigen Sie, dass die eingeschränkte Abbildung $f\big|_X : X \to \mathbb{C}$ injektiv ist. Bestimmen Sie die Menge $f(X)$.

Aufgabe 2 (schriftlich)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, in welchen Punkten folgende Abbildungen $f_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und auf welchen offenen Mengen sie holomorph sind:

   i) $f_1(z) = zRe(z)$
   ii) $f_2(z) = z^3$
   iii) $f_3(z) = z^2 + i$

b) Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^y, -e^x)$. Zeigen Sie, dass f in allen Punkten $x \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobimatrix von f. Fassen Sie f als Abbildung $\hat{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf. In welchen Punkten ist $\hat{f}$ komplex differenzierbar und auf welchen offenen Mengen ist $\hat{f}$ holomorph?

c) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   i) Das Quadrat einer komplexen Zahl ist stets eine reelle Zahl.
   ii) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist die n-te Ableitung einer holomorphen Funktion stetig.
   iii) Die Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = |\sin(z)|$ ist beschränkt.
   iv) Es gibt eine holomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $h(\frac{2}{n}) = h(\frac{-2}{n}) = \frac{2}{n}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.
   v) Für eine feste natürliche Zahl $n \geq 2$ ist die Summe aller n-ten Einheitswurzeln stets 0.

Aufgabe 3

a) Beweisen Sie folgende Additionstheoreme für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$:
$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$.

b) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen $\sin(z)$ und $\cos(z)$ um einen beliebigen Punkt $w \in \mathbb{C}$ und die dazugehörigen Konvergenzradien.

c) Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} | \cos(z) = 2\}$.

d) Beweisen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes folgende Formel für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$(\cos(z))^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos((2k-n)z)$$

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte der unten stehenden Folgen von komplexen Zahlen und entscheiden Sie, ob die Folgen konvergieren:

i) $a_n = \frac{i}{n}$

ii) $b_n = (-i)^n$

iii) $c_n = (\frac{4+10i}{1000})^n$

iv) $e_n = (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n + \frac{1}{(2i)^n}$

v) $f_n = e^{2\pi i n x}$, für eine rationale Zahl x.

b) Sei (d_n) eine Folge von komplexen Zahlen und definiere eine weitere Folge (s_n) durch $s_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$.

i) Zeigen Sie, dass (s_n) gegen d konvergiert, sofern (d_n) gegen $d \in \mathbb{C}$ konvergiert.

ii) Angenommen, (s_n) konvergiert, konvergiert dann auch (d_n)?