1 Komplexe Funktionen

Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0},\ U_\varepsilon(z) = \{u \in \mathbb{C} : |u - z| < \varepsilon\}$ eine offene Kreisscheibe um z.

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + i\ b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* gegen z_0, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$

$\Leftrightarrow d(z_n, z_0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ in $\mathbb{R} \Leftrightarrow \sqrt{(a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\Leftrightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_0$ und $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b_0$ (in $\mathbb{R}$).

Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ ($I \subset \mathbb{C}$) ist *stetig* an $z_0 \in I \Leftrightarrow$ [$\forall$ Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$] $\Leftrightarrow$ [$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall u \in I : d(u, z_0) = |u - z_0| < \delta \Rightarrow d(f(u), f(z_0)) = |f(u) - f(z_0)| < \varepsilon$.]

1.1 Definition Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, $z_0 \in U$. f heißt *an z_0 differenzierbar*:$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert. Der Grenzwert heißt dann *Ableitung* von f an der Stelle z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

Falls f für alle $z \in U$ differenzierbar ist, heißt f *holomorph* auf U.
Falls f auf $U = \mathbb{C}$ holomorph ist, heißt f *ganze Funktion.*

1.2 Theorem Sei $f = g + ih : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung, $z_0 \in U$. Dann ist f an z_o (komplex) differenzierbar genau dann, wenn f an $z_0 \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist und die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* erfüllt:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \text{ und } \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial h}{\partial x}(z_0)$$

Kurz: $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

In diesem Fall entspricht die Jacobimatrix $J_f(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ von f an z_0 genau der komplexen Zahl $f'(z_0) = a + i\,b$.

1.3 Theorem Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann gibt es für die Folge $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j(z - z_0)^j$ drei Möglichkeiten:

(a) Konvergenz nur für $z = z_0$.

(b) Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) $\exists\ R \in \mathbb{R}_{>0}$ so dass gilt: $\begin{cases} \text{Konvergenz für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < R, \\ \text{Divergenz für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| > R. \end{cases}$

R heißt *Konvergenzradius*, im Fall (a) sei $R := 0$, im Fall (b) sei $R := \infty$.

Im Inneren des Konvergenzkreises $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ konvergiert die 'Potenzreihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ absolut und definiert eine holomorphe Funktion auf S.

1.4 Theorem Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $R \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ so dass $S = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset U$ gilt. Dann existiert eine Potenzreihe, so dass für alle $z \in S$ gilt:
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Diese Potenzreihe ist eindeutig bestimmt.
f ist also nicht nur einmal, sondern beliebig oft differenzierbar, und die Potenzreihe ist die Taylorreihe, d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ für alle $z \in S$.

Beispiele:
Exponentialfunktion $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
Kosinus $\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
Sinus $\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$e^{iz} = \cos z + i \sin z$.
$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$.
Für $z = x + iy$ gilt: $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Eulersche Identität: $e^{i\pi} = -1$.

2 Fourier-Analysis

2.1 Definition Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch mit Periode* $L \in \mathbb{R}_{>0}$ $:\Leftrightarrow \ \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + L)$.

2.2 Lemma Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $L-$periodisch. Sei $g(x) := f(\frac{L}{2\pi}x)$. Dann ist g $2\pi-$periodisch.

2.3 Proposition

(a) $\int_0^{2\pi} \cos kx \ \sin lx \ dx = 0 \ \forall \ k, l \ \in \mathbb{N}_0$

(b) $\int_0^{2\pi} \cos kx \ \cos lx \ dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \ \sin lx \ dx = 0 \ \forall k, l \in \mathbb{N}_0 : k \neq l$

(c) $\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \ dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \ dx = \pi \ \forall k \in \mathbb{N}$

2.4 Proposition Sei $V := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar$\}$. Für $f, g \in V$ sei $\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Dann ist $\langle \ , \ \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}-$Vektorraum V.
Bezüglich dieser Form stehen die Funktionen $1, \cos kx, \sin kx$ $(k \geqslant 1)$ orthogonal aufeinander.

2.5 Definition

(a) Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Die Zahlen $a_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \ dx$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $b_k := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \ dx$ $(k \in \mathbb{N})$ heißen *Fourier-Koeffizienten* von f.
Sei $s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. Falls $s_n(x)$ für $x \in [0, 2\pi], n \to \infty$,

konvergiert, nennen wir den Grenzwert die *Fourier-Reihe zu f* und schreiben

$$s(x) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

(b) Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar, $f = u + iv$. Die Zahlen $c_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ für $k \in \mathbb{Z}$ heißen *Fourier-Koeffizienten* von f.

Sei $s_n(x) := \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ $(n \in \mathbb{N})$. Falls $s_n(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi], n \to \infty$, konvergiert, nennen wir den Grenzwert die *Fourier-Reihe zu f* und schreiben

$$s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}.$$

2.6 Besselsche Ungleichung: $\sum\limits_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$

Also konvergiert $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$. Insbesondere gilt $|c_k| \to 0$ für $k \to \pm\infty$.

2.7 Theorem Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

$\langle f - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k, f - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e_k\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$

(Diese Konvergenz nennt man *Konvergenz im quadratischen Mittel*)

2.8 Sätze von Dirichlet Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

(a) Sei f differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von f punktweise gegen f, d.h. $s_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [0, 2\pi]$.

(b) Sei f stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig gegen f, d.h. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant \mathbb{N}_0\ \forall x \in [0, 2\pi] : |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (dasselbe N_0 ist für alle x wählbar).

(c) Sei f stückweise stetig und stückweise monoton bezüglich $[0, 2\pi] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_l, 2\pi]$, so dass für jedes $x \in \{t_1, \ldots, t_n\}$ die einseitigen Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$ existieren.

Dann konvergiert die Fourier-Reihe $s_n(x)$ gegen $f(x)$ für $x \notin \{t_1, \ldots, t_n\}$ und gegen $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ für $x \in \{t_1, \ldots, t_n\}$.

2.9 Riemannscher Lokalisationssatz: Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar. Dann konvergiert die Folge $s_n(x)$ genau dann gegen die Zahl $s(x)$, wenn $\exists\, \delta \in (0, \pi)$ mit $\int_0^{\delta} (f(x + t) + f(x - t) - 2s(x))\, D_n(t)dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.10 Dinis Test: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) $2\pi-$periodisch und Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$. Sei $x \in [0, 2\pi]$. Falls $\exists \delta > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$, so dass
$|f(x + t) - f(x)| \leqslant \mu \cdot |t|$ für $|t| < \delta$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.
D.h. die Fourierreihe konvergiert gegen $f(x)$.

2.11 Grenzwertsatz von Cauchy: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist die Folge $\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ auch konvergent und hat ebenfalls den Grenzwert a.

2.12 Definition Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *C-summierbar* (oder Cesàro-summierbar) $:\Leftrightarrow \left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

2.13 Satz von Fejér: Sei f $2\pi-$periodisch und x eine Stelle, an der die einseitigen Grenzwerte $f(x+)$ und $f(x-)$ existieren. Dann ist die Fourierreihe an dieser Stelle C-summierbar mit dem Grenzwert $s(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

2.14 Approximationssatz von Weierstraß: Seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (oder $f : [a,b] \to \mathbb{C}$) stetig. Dann existiert ein Polynom P_ε mit reellen (beziehungsweise komplexen) Koeffizienten, so dass gilt

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

3 Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

3.1 Definition Sei $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ ein kompaktes (abgeschlossenes und beschränktes) Intervall in $\mathbb{R}^n, f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Aus Partitionen von $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ erhält man eine Zerlegung Z von I in Teilintervalle.
Sei $J = [x_1, y_1] \times \ldots \times [x_n, y_n] \subset I$ das Produkt von n Teilintervallen der Zerlegung Z, und $vol(J) := \prod_{j=1}^n (y_j - x_j)$. Dann ist

$$m(J) := \inf\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in J\}$$

$$M(J) := \sup\{f(\vec{x}) : \vec{x} \in J\}$$

und die

$$\textit{Untersumme } U(f,Z) := \sum_{J\in Z} m(J)\ vol(J)$$

$$\textit{Obersumme } O(f,Z) := \sum_{J\in Z} M(J)\ vol(J)$$

f heißt *(Riemann-)integrierbar* auf I $:\Leftrightarrow \sup\limits_Z U(f,Z) = \inf\limits_Z O(f,Z)$.
Bezeichnung: $\int_I f(x_1,\ldots,x_n)d(x_1,\ldots,x_n) = \sup\limits_Z U(f,Z)$

bzw. $\int_I f(\vec{x})d\vec{x} = \sup\limits_Z U(f,Z)$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$$f \text{ integrierbar} \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists \text{ Zerlegung } Z \text{ von } I : O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon.$$

$$f \text{ stetig} \Longrightarrow f \text{ integrierbar}.$$

3.2 Satz von Fubini: Sei $n = p + q, I$ ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^p$ und J ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^q$, also $I \times J$ ein kompaktes Intervall im $\mathbb{R}^n$. Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ integrierbar und sei $g : J \to \mathbb{R}$ mit $g(\vec{y}) := \int_I f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x}$ für alle $\vec{y} \in J$ definiert, d.h. für jedes $\vec{y}$ ist $f(\vec{x}, \vec{y})$ auf I integrierbar. Dann ist g auf J integrierbar und es gilt:

$$\int_{I \times J} f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y}) = \int_J \left(\int_I f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y}$$

Die Voraussetzungen sind erfüllt, wenn f stetig ist. Dann kann man die Integrationsreihenfolge verändern, d.h.

$$\int_J \left(\int_I f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{x} \right) d\vec{y} = \int_I \left(\int_J f(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \right) d\vec{x} = \int_{I \times J} f(\vec{x}, \vec{y}) d(\vec{x}, \vec{y})$$

3.3 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^n$. Die *charakteristische Funktion* c_S von S ist definiert durch
$$c_S(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \vec{x} \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Falls $\int_{\mathbb{R}^n} c_S d\vec{x}$ integrierbar ist, definieren wir das *Volumen* von S als $vol(S) := \int_{\mathbb{R}^n} c_S \, d\vec{x}$. S heißt dann *(Jordan-)messbar.*

3.4 Satz von Cavalieri: Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ messbar und beschränkt, d.h.
$S \subset I = [a, b] \times [a, b] \times \ldots \times [a, b]$. Sei $l \in \{1, \ldots, n\}$ fest und sei für $\xi \in [a, b]$ die Menge $S_\xi^{(l)}$ definiert durch $S_\xi^{(l)} := S \cap \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I : \; x_l = \xi\}$. Sei $S_\xi^{(l)}$ messbar (als Teilmenge von $\mathbb{R}^{n-1}$) für alle $\xi \in [a, b]$, mit Volumen $vol\left(S_\xi^{(l)}\right) = v_l(\xi)$. Dann gilt $vol(S) = \int_a^b v_l(\xi) d\xi$.

Mengen von Volumen 0 heißen *Jordansche Nullmengen.*

3.5 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. $\vec{a}$ heißt *Randpunkt* von S :$\Leftrightarrow$
$\forall \, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\vec{a}) \cap S \neq \varnothing$ und $U_\varepsilon(\vec{a}) \not\subset S$, wobei $U_\varepsilon(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < \varepsilon\}$ ist.
Der *Rand* ∂S von S ist die Menge aller Randpunkte von S.

3.6 Theorem Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und ∂S eine Nullmenge. Dann ist c_S integrierbar, d.h. S ist meßbar und $vol(S)$ ist definiert.

3.7 Theorem Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $F : S \to \mathbb{R}$ beschränkt, so dass
$\{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S : f$ unstetig an $\vec{x}\}$ eine Nullmenge ist. Dann ist f auf S integrierbar.

3.8 Theorem Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und f auf S integrierbar, N eine Nullmenge und $g : S \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so dass $f(\vec{x}) = g(\vec{x}) \; \forall \; \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S \setminus N$.
Dann ist g integrierbar und $\int_S f \, d\vec{x} = \int_S g \, d\vec{x}$.

3.9 Theorem

(a) Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $f : S \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist der Graph $G(f) = \{(\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), f(\vec{x})) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ eine Nullmenge.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar, und $N \subset U$ eine abgeschlossene und beschränkte Nullmenge. Sei $n \leqslant p$. Dann ist das Bild $f(N)$ eine Nullmenge.

3.10 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $j \in \{1, \dots, n\}$.
S heißt *projizierbar in Richtung der x_j−Achse* $:\Leftrightarrow$ $\exists$ meßbare Menge $S_j \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (mit Variablen $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$) und $\exists$ stetig differenzierbare Funktionen $u : S_j \to \mathbb{R}$ und $o : S_j \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} S \cup \partial S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ & (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in S_j \text{ und} \\ & u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \leqslant x_j \leqslant o(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

$S \cup \partial S =: \overline{S}$ ist der *Abschluß* von S.

3.11 Satz von Fubini für projizierbare Mengen: Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, projizierbar in Richtung der x_j−Achse und $f : S \to \mathbb{R}$ sei integrierbar.
Für alle $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in S_j$ soll das Integral

$$\int_{u(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)}^{o(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_j$$

existieren. Dann existiert auch das iterierte Integral

$$\int_{S_j} \left(\int_{u(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)}^{o(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)} f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) dx_j \right) d(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

und ist gleich $\int_S f(\vec{x}) \, d\vec{x}$.

3.12 Transformationsformel (Substitutionsregel für Funktionen in n Variablen): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar und $\det J(\varphi)$ überall positiv (oder überall negativ). Sei $S \subset U$ kompakt und Jordan-meßbar, und $f : \varphi(S) \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\varphi(S)$ Jordan-meßbar, f auf $\varphi(S)$ integrierbar und $\int_{\varphi(S)} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_S f\left(\varphi(\vec{t}\,)\right) \ |\det\left(J(\varphi)(\vec{t}\,)\right) \ | \, d\vec{t}$.

4 Kurvenintegrale und Vektorfelder

4.1 Definition Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die Menge
$K = \{f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} : t \in [a, b]\}$ heißt *Kurve* im $\mathbb{R}^n$,
mit Parameterdarstellung $(f, [a, b])$.

4.2 Definition Sei K eine Kurve mit Parameterdarstellung $(f, [a, b])$. Für eine Partition $P = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_l\}$ von $[a, b]$ ist $L_P(K) := \sum\limits_{j=1}^{l} d\left(f(t_{j-1}), f(t_j)\right)$.
K heißt *rektifizierbar* $:\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}\ \forall$ Partitionen P von $[a, b]$ gilt: $L_P(K) \leqslant \mu$.

Wenn K rektifizierbar ist, dann heißt $L(K) := \sup\limits_P L_P(K)$ die *Bogenlänge* von K.

4.3 Definition Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist *von beschränkter Schwankung* (oder: von beschränkter Variation) $:\Leftrightarrow \exists\ \mu \in \mathbb{R}\ \forall$ Partitionen

$P = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_l = b\} : V_P(f) := \sum_{j=1}^{l} |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leqslant \mu.$

Bezeichnung: $f \in BV[a,b]$. $\sup_P V_P(f) =: V(f)$ Totalvariation von f auf $[a,b]$.

4.4 Charakterisierung der Funktionen von beschränkter Schwankung: Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist $f \in BV[a,b] \Leftrightarrow \exists f^+, f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ beide monoton wachsend mit $f = f^+ - f^-$.

4.5 Charakterisierung rektifizierbarer Kurven: Sei K eine Kurve mit Parameterdarstellung $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$. Dann ist K rektifizierbar genau dann, wenn alle Koordinatenfunktionen f_j $(j = 1, \ldots, n)$ von beschränkter Schwankung sind.

Falls f stetig differenzierbar ist, gilt:

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (f_j'(t))^2 dt} = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

Der Vektor $\overrightarrow{T_f}(t) := \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{pmatrix} \right\|$ heißt dann *Tangenten-* oder *Tangentialvektor*.

4.6 Definition Sei $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \varnothing$. Ein *Vektorfeld* auf X ist eine Abbildung $\vec{V} : X \to \mathbb{R}^n$, die jedem $x_0 \in X$ einen Vektor $\vec{V}(x_0)$ zuordnet.

4.7 Definition Ein Vektorfeld $\vec{V} : X \to \mathbb{R}^n$, das von der Form $\vec{V} = \operatorname{grad} p$ ist für eine Abbildung (Skalarfeld) $p : X \to \mathbb{R}$, heißt *Gradientenfeld.* Die Funktion p heißt das *Potential* des Vektorfelds $\vec{V}$.

4.8 Definition Sei $K = (f, [a,b])$ eine stückweise glatte (d.h. stückweise stetig differenzierbare) Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $\vec{V}$ ein stetiges Vektorfeld auf K. Dann ist das *Kurvenintegral* von $\vec{V}$ längs K bezüglich der Darstellung $(f, [a,b])$ definiert durch

$$\int_a^b \langle \vec{V}(f(t)), \vec{f'}(t) \rangle\, dt.$$

Wenn $V_1, \ldots, V_n$ die Komponentenfunktionen von $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$ sind, können wir auch $\int_K V_1 dx_1 + \ldots + V_n dx_n$ schreiben, wobei $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ die Koordinatenfunktionen der Kurve sind. Oder $\int_K \vec{V} d\vec{x}$.

4.9 Proposition Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine rektifizierbare Kurve und $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige und streng monoton wachsende Bijektion. Dann ist $f \circ \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ auch rektifizierbar und stellt dieselbe Kurve dar, und es gilt: $\int_f g(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{f \circ \varphi} g(\vec{x}) d\vec{x}$.
Hier ist g eine beliebige stetige Funktion $g : S \to \mathbb{R}$, wobei S die Kurve $(f, [a,b])$ enthält.

4.10 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Gradientenfelder: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

(a) Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\vec{a}, \vec{b} \in U$ und γ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve vom Anfangspunkt $\vec{a}$ zum Endpunkt $\vec{b}$, die ganz in U verläuft. Dann gilt:

$$\int_\gamma \operatorname{grad} f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$

Der Wert des Integrals ist also unabhängig vom Verlauf der Kurve. Wir sagen: Das Integral ist *wegunabhängig.*

(b) Sei U außerdem zusammenhängend (d.h. für alle $\vec{a}, \vec{b} \in U$ gibt es eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to U$ so dass $\gamma(0) = \vec{a}$ und $\gamma(1) = \vec{b}$). Sei $\vec{V} : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit wegunabhängigem Integral. Dann ist $\vec{V}$ ein Gradientenfeld. Genauer: Für einen beliebigen Punkt $\vec{a} \in U$ ist die Funktion

$$f : U \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(\vec{x}) := \int_{\vec{a}}^{\vec{x}} \vec{V}(\vec{y})\, d\vec{y} \quad (\vec{x} \in U)$$

stetig differenzierbar und $\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \vec{V}(x)$.

4.11 Proposition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und *konvex* (d.h. für alle $\vec{a}, \vec{b} \in U$ liegt die Verbindungsstrecke von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ ganz in U). Sei $\vec{V} : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Falls $\frac{\partial \vec{V}_j}{\partial \vec{x}_l} = \frac{\partial \vec{V}_l}{\partial \vec{x}_j}$ für alle $j, l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, dann ist $\vec{V}$ ein Gradientenfeld.

4.12 Integralsatz von Green (Gaußscher Integralsatz in der Ebene): Sei $U \subset \mathbb{R}^2, U$ offen, $S \subset U$ ein (in beide Richtungen projizierbarer) Standardbereich, $\vec{V} = \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}$ ein auf U stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_{\partial S} L dx + M dy$$

5 Flächen und Vektorfelder

5.1 Definition Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ und $f : S \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

Dann heißt die Punktmenge $F = \left\{ \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in S \right\}$ eine *Fläche* im $\mathbb{R}^3$, mit Parameterdarstellung (f, S).

Standard-Voraussetzung: S offen, f stetig differenzierbar, und die Jacobi-Matrix $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}$ hat Rang 2.

5.2 Definition Sei $f : S \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in S$, also $f(u_0, v_0)$ ein Punkt auf der Fläche. Die Vektoren $\overrightarrow{f}_u(u_0, v_0)$ und $\overrightarrow{f}_v(u_0, v_0)$ sind die Basisvektoren einer Ebene, der *Tangentialebene* der Fläche F im Punkt $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

5.3 Definition Seien $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann ist das *Vektorprodukt* = Kreuzprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, der Vektor $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ mit $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Merkregel: Seien $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ die Einheitsvektoren. Dann ist $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e_1} & a_1 & b_1 \\ \overrightarrow{e_2} & a_2 & b_2 \\ \overrightarrow{e_3} & a_3 & b_3 \end{pmatrix}$.

In den folgenden drei Definitionen sei F eine Fläche mit Parameterdarstellung (f, S).

5.4 Definition Der Vektor

$$\overrightarrow{N}(u,v) := \frac{\overrightarrow{f}_u(u,v) \times \overrightarrow{f}_v(u,v)}{\|\overrightarrow{f}_u(u,v) \times \overrightarrow{f}_v(u,v)\|}$$

heißt *Normalenvektor* von F an der Stelle $f(u,v)$.

5.5 Definition Der *Flächeninhalt* von F ist definiert als der Wert des Integrals

$$\int_S \|\overrightarrow{f}_u(u,v) \times \overrightarrow{f}_v(u,v)\| \; d(u,v) =: \int_F d\sigma \qquad (\text{oder } \iint\limits_F d\sigma).$$

5.6 Definition Sei $g : F \to \mathbb{R}$ stetig. Das *Oberflächenintegral* von g über F bezüglich (f, S) ist definiert als

$$\int_F g \; d\sigma := \int_S g\;(f(u,v)) \cdot \|\overrightarrow{f}_u(u,v) \times \overrightarrow{f}_v(u,v)\| \; d(u,v)$$

5.7 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die *Rotation von* $\overrightarrow{V}$ definiert als das Vektorfeld $\operatorname{rot} \overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

5.8 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overrightarrow{V} : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist die *Divergenz* von $\overrightarrow{V}$ definiert als das Skalarfeld $\operatorname{div} \overrightarrow{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{div} \overrightarrow{V}(\overrightarrow{x}) := \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(\overrightarrow{x}) + \ldots + \frac{\partial V_1}{\partial x_n}(\overrightarrow{x}).$$

5.9 Definition Der *Laplace-Operator* $\triangle$ bildet f ab auf

$$\triangle f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Die Funktion f heißt *harmonisch* $:\Leftrightarrow \triangle f = 0$.

5.10 Proposition

(a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}(\bigtriangledown f) = 0$

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{V}) = 0$

(c) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{div}(\bigtriangledown f) = \triangle f$

5.11 Definition
Ein Vektorfeld $\vec{V}$ heißt *quellenfrei*, wenn $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.
Ein Vektorfeld $\vec{V}$ heißt *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot} \vec{V} = 0$.

5.12 Proposition Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen.

(a) Wenn $f = u + iv : U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann sind u und v harmonisch.

(b) Wenn $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, U konvex, dann $\exists\, f = u + iv, f$ holomorph. Insbesondere ist u beliebig oft differenzierbar.

6 Die Integralsätze von Gauß und von Stokes

6.1 Integralsatz von Gauß: Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen , $S \subset D$ ein Standardbereich, $\vec{V} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ P \end{pmatrix} : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $\vec{N}$ ein nach außen zeigender Normalenvektor auf ∂S.

Dann gilt:

$$\int_S \operatorname{div} \vec{V}\, d(x,y,z) = \int_{\partial S} \langle \vec{V},\ \vec{N} \rangle\, d\sigma$$

6.2 Integralsatz von Stokes: Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\vec{V} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ P \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, zweimal stetig differenzierbar, und F eine Fläche mit Parameterdarstellung (f, S), so dass $f(S) \subset D$, d.h. die Fläche F ist in D enthalten. G sei ein in F enthaltenes Flächenstück, $G = f(T), T \subset S$ eine endliche Vereinigung von Standardbereichen.

Dann gilt:

$$\int_G \langle \operatorname{rot} \vec{V},\ \vec{N} \rangle\, d\sigma = \int_{\partial G} L\, dx + M\, dy + P\, dz$$

6.3 Lemma Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, beide stetig differenzierbar. Dann ist

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{V}) = \langle \operatorname{grad} \varphi, \vec{V} \rangle + \varphi \operatorname{div} \vec{V}.$$

6.4 Korollar (partielle Integration):

$$\int_S \varphi \operatorname{div} \vec{V}\ d(x,y,z) = \int_{\partial S} \langle\ \varphi \vec{V}, \vec{N}\rangle\ d\sigma - \int_S \langle \text{grad}\ \varphi, \vec{V}\rangle\ d(x,y,z)$$

6.5 Greensche Formeln:

(1)

$$\int_S \langle \text{grad}\ \ \varphi, \text{grad}\ \psi\rangle\ d(x,y,z) = \int_{\partial S} \varphi \langle \text{grad}\ \psi, \vec{N}\rangle\ d\sigma - \int_S \varphi \triangle \psi\ d(x,y,z)$$

(2)

$$\int_S (\varphi\ \triangle \psi - \psi \triangle \varphi)\ d(x,y,z) = \int_{\partial S} (\varphi \langle \text{grad}\ \psi, \vec{N}\rangle - \ \psi \langle \text{grad}\ \varphi, \vec{N}\rangle)\ d\sigma$$

6.6 Spezialfall des Integralsatzes von Cauchy: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $S \subset U$ ein Standardbereich mit Randkurve $\partial S = \gamma$. Dann ist

$$\int_{\partial S} f(z)\ dz = 0.$$

7 Vektorfelder und Differentialgleichungen

7.1 Definition Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $F = F\ (t, \vec{x}) : U \to \mathbb{R}^n$. heißt ein *zeitabhängiges Vektorfeld*, oder ein *dynamisches System*. Eine *Lösung* oder *Integralkurve* von F ist eine differenzierbare Kurve $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, so dass $(t, \varphi(t)) \in U$ und $\dot{\varphi}(t) = F(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$ gilt.

7.2 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $G \subset \mathbb{R} \times U$ und $\vec{V} : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Der *Fluss* von $\vec{V}$ ist eine Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(t, \vec{x}) =: y(t)$ als Funktion in t eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \vec{V}(y(t)) \quad \text{ zur Anfangsbedingung } \quad y(0) = \vec{x}$$

ist.

7.3 Definition Der Fluss φ heißt *volumentreu*, wenn für jede messbare Menge $K \subset D$ gilt: $vol(K) = vol(\varphi_t(K))$ für alle t. $\vec{V}$ heißt dann ebenfalls volumentreu.

7.4 Theorem Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}$ ist volumentreu $\Leftrightarrow$ $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

8 Variationsrechnung

8.1 Definition Sei $U \subset \mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. U heißt *erweiterter Phasenraum*. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \to \mathbb{R}$ heißt *Lagrangefunktion*.

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ bezeichnet die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $u : I \to \mathbb{R}^n$. Der 1-*Graph* von u ist die Menge $\{\ (x, u(x), u'(x)) \mid x \in \mathbb{R}\ \} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Mit

$\mathscr{C}_1(I,U)$ bezeichnen wir die Menge $\{u \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^n) : 1\text{-}Graph(u) \subset U\}$. Die Abbildung $V : \mathscr{C}_1(I,U) \to \mathbb{R}$ mit

$$V(u) := \int_a^b F(x,u(x),u'(x))\,dx$$

heißt ein *Funktional* oder ein *Variationsintegral.*

Seien $P, Q \in \mathbb{R}^n$ mit $P \neq Q$ und $M := \{\ u \in \mathscr{C}_1(I,U) : u(a) = P,\ u(b) = Q\ \}$.

Dann ist die Aufgabe, das Variationsfunktional V auf der Menge M zu minimieren (oder zu maximieren).

Zur Vereinfachung sei im Folgenden $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Sei $u \in M$, $\varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$.
Wir definieren eine Kurvenschar $h : I \times (-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ durch

$$h(x,\varepsilon) := u(x) + \varepsilon\,\varphi(x).$$

Die Kurve u ist in die Kurvenschar $h(-,\varepsilon)$ eingebettet, für $\varepsilon = 0$.
Das Funktional V können wir an jeder Kurve der Schar auswerten. Das definiert eine Funktion $\Phi : (-\varepsilon_0,\ \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ durch $\Phi(\varepsilon) := V(u + \varepsilon\ \varphi)$.

8.2 Definition Die *erste Variation* von V an der Stelle u in Richtung von φ ist definiert als

$$\dot{\Phi}(0) := \frac{d}{d\varepsilon} V(u + \varepsilon\ \varphi)\Big|_{\varepsilon=0.}$$

Bezeichnung: $\delta V(u,\varphi) := \dot{\Phi}(0)$.

Falls u ein Extremum des Variationsfunktionals V auf der Menge M ist, gilt $\dot{\Phi}(0) = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{C}^1(\,I,\mathbb{R}^n)$.

8.3 Definition

$$\mathscr{C}_c^1(\,\dot{I},\mathbb{R}^n) := \{\ \varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^n) :\ \exists\ \alpha,\beta : a < \alpha < \beta < b \text{ mit } \varphi(x) = 0\ \forall x \notin (\alpha,\beta)\ \}.$$

8.4 Fundamentallemma der Variationsrechnung: Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, d. h. $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\int_a^b \langle f(x),\varphi(x)\rangle\,dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathscr{C}_c^1(\dot{I},\mathbb{R}^n)$$

Dann gilt: $f(x) = 0\ \forall\ x \in I$.

8.5 Theorem Seien $F, F_{p_1},\ldots,F_{p_n} \in \mathscr{C}^1(U)$ und $u \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}^n)$:

(1) Aus $\delta V(u,\varphi) = 0\ \forall\varphi \in \mathscr{C}_c^1(\dot{I},\mathbb{R}^n)$ folgt, daß F und u auf I das System der *Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen* erfüllen.

$$\frac{d}{dx} F_{p_j}(x,u(x),u'(x)) = F_{z_j}(x,u(x),u'(x)) \text{ für } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

(2) Aus $\delta V(u,\varphi) = 0 \ \forall \varphi \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ folgt zusätzlich

$$F_{p_j}(x, u(x), u'(x)) = 0 \text{ für } x \in \{a,b\} \text{ und } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Diese Bedingung heißt *natürliche Randbedingung.*

8.6 Energiesatz: Falls $n = 1$ und $F = F(z,p)$ nicht von x abhängt, muss jede Lösung u der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichung auch eine Gleichung

$$u'(x)\, F_p(u(x), u'(x)) - F(u(x), u'(x)) = \text{ konstant}$$

erfüllen.

Sei $\Psi(z,p) := p - F_p(z,p).\Psi$ heißt Energieintegral.

9 Ganze Funktionen

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ die Parametrisierung einer Kurve C in $\mathbb{C}$.
Generelle Voraussetzung an Kurven: *glatt.* Das bedeutet:

- γ stückweise stetig differenzierbar:

  γ stetig auf $[a,b]$ und $[a,b] = [a,c_1] \cup [c_1,c_2] \cup \ldots \cup [c_n,b], \gamma$ stetig differenzierbar auf jedem Teilintervall (einseitig an den Grenzen)

- $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an allen t bis auf endlich viele.

Das Kurvenintegral für eine stetige Funktion $f : C \to \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\int_C f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\ \dot{\gamma}(t)\, dt.$$

9.1 Proposition

(a) Sei $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $|\int_a^b g(t)\, dt| \leqslant \int_a^b |g(t)|\, dt$.

(b) Sei C eine glatte Kurve der Länge L, $f : C \to \mathbb{C}$ stetig und $M > 0$, so dass $|f(z)| \leqslant M$ für alle $z \in C$ gilt. Dann ist $|\int_C f(z) dz| \leqslant M \cdot L$.

9.2 Proposition Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $F : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $F' =: f$ und C eine glatte Kurve in U mit Anfangspunkt A und Endpunkt B. Dann gilt

$$\int_C f(z)\, dz = F(B) - F(A).$$

9.3 Definition Eine Kurve C mit Parametrisierung $(\gamma, [a,b])$ heißt *geschlossene Kurve* $:\Leftrightarrow \gamma(a) = \gamma(b)$. C heißt dann *einfach geschlossen* $:\Leftrightarrow$
$[\forall\ t_1, t_2 \in [a,b], t_1 < t_2 : \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = a$ und $t_2 = b.]$

9.4 Proposition Sei f eine ganze Funktion und Γ der Rand eines Rechtecks R.

Dann gilt: $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.

9.5 Existenz einer Stammfunktion: Eine ganze Funktion f besitzt überall eine Stammfunktion, d.h. $\exists\ F$ ganz mit $F'(z) = f(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$.

9.6 Cauchys Integralsatz für ganze Funktionen: Sei f eine ganze Funktion und C eine glatte geschlossene Kurve. Dann gilt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

9.7 Proposition Sei f eine ganze Funktion, $a \in \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{falls } z \neq a, \\ f'(a) & \text{falls } z = a. \end{cases}$$

Die Funktion g besitzt eine Stammfunktion und für alle geschlossenen glatten Kurven C gilt: $\int_C g(z)dz = 0$.

9.8 Cauchys Integralformel: Sei f eine ganze Funktion, C ein Kreis um 0 mit Radius R, parametrisiert durch $R\,e^{i\vartheta}, 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi,$ und $a \in \mathbb{C}$ mit $R > |a|$. Dann gilt:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

9.9 Satz von Liouville: Sei f eine beschränkte ganze Funktion. Dann ist f konstant.

9.10 Fundamentalsatz der Algebra: Sei $f \in \mathbb{C}[z]$ ein nicht-konstantes Polynom (d.h. $\mathrm{Grad}(f) =: n \geqslant 1$) mit komplexen Koeffizienten. Dann hat f eine komplexe Nullstelle: $\exists\ z_1 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_1) = 0$. Ferner ist f ein Produkt aus Linearfaktoren:

$$f(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

mit (nicht notwendig verschiedenen) $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

9.11 Taylorentwicklung: Sei f eine ganze Funktion. Dann hat f eine Potenzreihenentwicklung um $0 : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Für die Koeffizienten C_k gilt:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw \qquad (C \text{ ein Kreis um } 0)$$

Die Potenz-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert also überall gegen $f(z)$. Die ganze Funktion f ist überall beliebig oft differenzierbar. Allgemeiner besitzt f an jeder Stelle $w \in \mathbb{C}$ eine Taylorentwicklung:

$$f(z) = f(w) + f'(w)\,(z-w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(w)}{k!}(z-w)^k + \ldots$$

10 Holomorphe Funktionen

10.1 Eindeutigkeitssatz Sei $D \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend und $f, g :\ D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$ eine konvergente Folge in D so dass $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$.

10.2 Korollar Sei f eine ganze Funktion mit $f(z) \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, (d.h. $\forall K \geqslant 0\ \exists M \geqslant 0 : |z| \geqslant M \Rightarrow |f(z)| \geqslant K$). Dann ist f ein Polynom.

10.3 Maximumprinzip: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe und nichtkonstante Funktion. Sei $z \in U$ und $\delta > 0$. Dann gibt es ein $w \in U$ mit $|w - z| < \delta$ und $|f(w)| > |f(z)|$. z ist also kein Maximum.

10.4 Satz von Morera: Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so daß für jedes Rechteck Γ, das in U liegt, $\int_\Gamma f(z)\ dz = 0$ gilt. Dann ist f holomorph.

10.5 Definition Sei D offen und zusammenhängend. (d. h. je zwei Punkte in D können durch eine stetige Kurve verbunden werden). D heißt *einfach zusammenhängend* :$\Leftrightarrow$ [für jede Zerlegung $\mathbb{C}\backslash D = A \dot\cup B$ in disjunkte abgeschlossene Teilmengen gilt:
A beschränkt $\Rightarrow A = \emptyset$, B beschränkt $\Rightarrow B = \emptyset$.]

10.6 Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz: Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann existiert eine Stammfunktion
$F : D \to \mathbb{C}$ mit $F' = f$, und für alle glatten geschlossenen Kurven C in D gilt:

$$\int_C f(z)\ dz = 0.$$

10.7 Definition Seien $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\ z^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k\ z^k$ heißt *Laurentreihe*,

$\displaystyle\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k\ z^k$ heißt *Hauptteil* der Laurentreihe,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ z^k$ heißt *Nebenteil* oder *analytischer Teil.*

10.8 Proposition
Eine Laurentreihe $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_k\ z^k$ konvergiert im Bereich $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ mit

$$R_1 = \limsup_{k\to\infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}} \qquad \text{und} \qquad R_2 = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}.$$

Falls $R_1 < R_2$, ist D ein Kreisring (= Ringgebiet) und $f(z) := \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_k\ z^k$ ist holomorph auf D.

10.9 Theorem
Sei D der Kreisring $\{\ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\ \}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Laurententwicklung $f(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ z^k$ für $z \in D$ (wobei $R_1 = 0$ möglich ist).

11 Der Residuensatz

Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$. Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt *isolierte Singularität* von f, wenn es ein $r > 0$ gibt, so dass f auf der punktierten Kreisscheibe $\dot{U}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ holomorph ist.

In den nächsten drei Definitionen sei f holomorph auf $\dot{U}(z_0, r)$ mit isolierter Singularität an z_0, und $U(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ die (nicht-punktierte) Kreisscheibe um z_0.

11.1 Definition Die Singularität z_0 heißt *hebbar* $:\Leftrightarrow\ \exists g : U(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z) = f(z)$ für alle $z \in \dot{U}(z_0, r)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)\ f(z) = 0$.

11.2 Definition Die Singularität z_0 heißt ein *Pol* $:\Leftrightarrow\ \exists\ g, h : U(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(z_0) \neq 0,\ h(z_0) = 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ für alle $z \in \dot{U}(z_0, r)$.

Ein Pol z_0 hat *Ordnung* k $:\Leftrightarrow$ z_0 ist k-fache Nullstelle von h
$\Leftrightarrow\ \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k\ f(z) \neq 0,$ aber $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1}\ f(z) = 0.$

11.3 Definition Die Singularität z_0 heißt *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch ein Pol ist.
$e^{\frac{1}{z}}$ ist ein Beispiel: $e^w = \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{w^k}{k!}$, d. h. $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$.

Großer Satz von Picard: In jeder punktierten Umgebung $\dot{U}(z_0, s)$ einer wesentlichen Singularität gilt: $f(z), z \in \dot{U}\ (z_0, s)$, nimmt jede komplexe Zahl als Wert an, sogar unendlich oft, mit höchstens einer Ausnahme (bei $e^{\frac{1}{z}}$ wird 0 nicht angenommen).

11.4 Definition Sei $f :\ \dot{U}(z_0, r) \to \mathbb{C}$ gegeben durch die Laurentreihe
$f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Die komplexe Zahl a_{-1} heißt das *Residuum* von f an z_0.

Bezeichnung: $a_{-1} =: \operatorname{Res}(f, z_0)$

11.5 Definition Sei γ eine geschlossene Kurve und $a \in \mathbb{C}$ mit $a \notin \gamma$. Dann heißt

$$n\,(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - a}\ dz$$

die *Windungszahl* (oder *Umlaufzahl*) von γ um a.

11.6 Residuensatz Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $z_1, \ldots, z_m \in D, (m \geqslant 0)$, und $f : D \backslash \{z_1, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph, mit isolierten Singularitäten an $z_1, \ldots, z_m$. Sei γ eine geschlossene Kurve mit $z_1, \ldots, z_m \notin \gamma$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, z_k)\ \operatorname{Res}(f, z_k)$$

11.7 Definition Eine Funktion $f : D \backslash \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ heißt *meromorph*
$:\Leftrightarrow f : D \backslash \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_1, \ldots, z_n$ sind Polstellen von f.

11.8 Korollar Sei γ eine einfach geschlossene Kurve, f eine auf γ und im Inneren von γ meromorphe Funktion, die auf γ weder Nullstellen noch Polstellen hat. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f}\, dz = N - P, \qquad \text{wobei}$$

$N := \#$ { Nullstellen von f im Inneren von γ, mit Vielfachheit gezählt),

$P := \#$ { Polstellen von f im Inneren von γ, mit Vielfachheit = Ordnung gezählt).

11.9 Verallgemeinerte Integralformel. Sei $D \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine einfach geschlossene Kurve in D. Dann gilt für alle z im Innern von γ und für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw$$

Primzahlsatz: Sei $\pi(x) := \#\ \{\ p \in \mathbb{N} : 1 \leqslant p \leqslant x,\ p \text{ Primzahl } \}$.
$\pi(x)$ ist asymptotisch gleich $\frac{x}{\ln(x)}$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n) \cdot \ln(n)}{n} = 1.$$