Name, Vorname: ____ **Matrikel-Nummer:** ____ **Studien-gang:** ____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
Punkte	/1	/4	/2	/3	/3	/8	/5	/6	/4	/8	/3	/5	/5	/2	/59

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass die Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: ____ **Gruppennr.:** ____

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$ ____ , $M^{-1} =$ ____

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ surjektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}\,(\alpha))$.

$d =$ ____ , Begründung: ____

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für alle reellen quadratischen Matrizen A gilt $\det(AA^T) \geqq 0$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix A so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 - 6x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt.

$A =$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 10 & -16 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von M, machen Sie die Probe und schreiben Sie M in Diagonalform D.

$\chi_M(t) =$, $\lambda_1 =$, $\lambda_2 =$

v_1 zu λ_1	Mv_1	v_2 zu λ_2	Mv_2

, $D =$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Sei f eine bijektive lineare Abbildung mit Eigenvektor v zum Eigenwert a. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{a}$ ein Eigenwert von f^{-1} ist. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor w an.

, $w =$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$\det(A) =$, $\det(A^3) =$, $\det(A^{-1}) =$, $\det(A^\mathsf{T}) =$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben seien ein reeller Vektorraum V mit Basis u, v, w und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(u) = v, \varphi(v) = w, \varphi(w) = u$.

a) Geben Sie $a = \varphi(u + 2v + 3w)$ als Linearkombination der angegebenen Basisvektoren an.

b) Geben Sie die darstellende Matrix M von φ bezüglich der vorgegebenen Basis von V an:

$a =$ $\boxed{}$, $M =$ $\boxed{}$

Aufgabe 10 (*8 Punkte*) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, falls definiert, AB und BA. Schreiben Sie n.d. (für nicht definiert) in das Kästchen, falls das Produkt nicht definiert ist.

$AB =$ $\boxed{}$, $BA =$ $\boxed{}$

Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\alpha(v) = Bv$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils Basen von Kern (α) und Bild (α) und bestimmen Sie den Rang r von α.

Basis von Kern (α): $\boxed{}$, Basis von Bild (α): $\boxed{}$, $r =$ $\boxed{}$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Sei U der von dem Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte reelle Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^3/U$ und Vektoren in $\mathbb{R}^3$, deren Äquivalenzklassen eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ bilden.

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3/U) =$ $\boxed{}$ Vektoren: $\boxed{}$

Aufgabe 12 (5 *Punkte*) Bestimmen Sie das Inverse von $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, protokollieren Sie Ihre Schritte, und schreiben Sie A als Produkt von Elementarmatrizen.

$A^{-1} =$, Protokoll:

$A =$

Aufgabe 13 (5 *Punkte*) Sei X die Menge der reellen Zahlen, die von 0 verschieden sind. Für $x, y \in X$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x \cdot y > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

, $d =$

Aufgabe 14 (2 *Punkte*) Sei $f \colon V \to V$ linear. Es gelte $f(-v) = 2v$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$. Geben Sie einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor w von f an.

$\lambda =$, $w =$

Name, Vorname:

Matrikel-Nummer:

Studien-gang:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
Punkte	/1	/4	/2	/3	/3	/8	/5	/6	/4	/8	/3	/5	/5	/2	/59

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass die Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$, $M^{-1} =$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ surjektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}\,(\alpha))$.

$d =$, Begründung:

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für alle reellen quadratischen Matrizen A gilt $\det(AA^T) \geqq 0$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix A

so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 6x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt. $A =$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von M, machen Sie die Probe und schreiben Sie M in Diagonalform D.

$\chi_M(t) =$, $\lambda_1 =$, $\lambda_2 =$

v_1 zu λ_1	Mv_1	v_2 zu λ_2	Mv_2

, $D =$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Sei f eine bijektive lineare Abbildung mit Eigenvektor v zum Eigenwert b. Zeigen Sie, dass $\dfrac{1}{b}$ ein Eigenwert von f^{-1} ist. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor w an.

, $w =$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$\det(A) =$, $\det(A^3) =$, $\det(A^{-1}) =$, $\det(A^{\mathsf{T}}) =$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben seien ein reeller Vektorraum V mit Basis u, v, w und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(u) = 2v, \varphi(v) = w, \varphi(w) = u$.

a) Geben Sie $a = \varphi(u + v + 3w)$ als Linearkombination der angegebenen Basisvektoren an.

b) Geben Sie die darstellende Matrix M von φ bezüglich der vorgegebenen Basis von V an:

$a =$ $\boxed{}$, $M =$ $\boxed{}$

Aufgabe 10 (*8 Punkte*) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, falls definiert, AB und BA. Schreiben Sie n.d. (für nicht definiert) in das Kästchen, falls das Produkt nicht definiert ist.

$AB =$ $\boxed{}$, $BA =$ $\boxed{}$

Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\alpha(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils Basen von Kern (α) und Bild (α) und bestimmen Sie den Rang r von α.

Basis von Kern (α): $\boxed{}$, Basis von Bild (α): $\boxed{}$, $r =$ $\boxed{}$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Sei U der von dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte reelle Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^3/U$ und Vektoren in $\mathbb{R}^3$, deren Äquivalenzklassen eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ bilden.

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3/U) =$ $\boxed{}$ Vektoren: $\boxed{}$

Aufgabe 12 (*5 Punkte*) Bestimmen Sie das Inverse von $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, protokollieren Sie Ihre Schritte, und schreiben Sie A als Produkt von Elementarmatrizen.

$A^{-1} =$, Protokoll:

$A =$

Aufgabe 13 (*5 Punkte*) Sei X die Menge der reellen Zahlen, die von 0 verschieden sind. Für $x, y \in X$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x \cdot y > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

, $d =$

Aufgabe 14 (*2 Punkte*) Sei $f \colon V \to V$ linear. Es gelte $f(-v) = 3v$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$. Geben Sie einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor w von f an.

$\lambda =$, $w =$

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studien-gang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
Punkte	/1	/4	/2	/3	/3	/8	/5	/6	/4	/8	/3	/5	/5	/2	/59

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass die Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$, $M^{-1} =$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ surjektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}\,(\alpha))$.

$d =$, Begründung:

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für alle reellen quadratischen Matrizen A gilt $\det(AA^T) \geqq 0$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix A so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 8x_1 - 6x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt. $A =$

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von M, machen Sie die Probe und schreiben Sie M in Diagonalform D.

$\chi_M(t) =$, $\lambda_1 =$, $\lambda_2 =$

v_1 zu λ_1	Mv_1	v_2 zu λ_2	Mv_2

, $D =$

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Sei f eine bijektive lineare Abbildung mit Eigenvektor v zum Eigenwert c. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{c}$ ein Eigenwert von f^{-1} ist. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor w an.

, $w =$

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$\det(A) =$, $\det(A^3) =$, $\det(A^{-1}) =$, $\det(A^\intercal) =$

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben seien ein reeller Vektorraum V mit Basis u, v, w und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(u) = v, \varphi(v) = 3w, \varphi(w) = u$.

a) Geben Sie $a = \varphi(u + 2v + w)$ als Linearkombination der angegebenen Basisvektoren an.

b) Geben Sie die darstellende Matrix M von φ bezüglich der vorgegebenen Basis von V an:

$a =$ $\boxed{}$, $M =$ $\boxed{}$

Aufgabe 10 (*8 Punkte*) Seien $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, falls definiert, AB und BA. Schreiben Sie n.d. (für nicht definiert) in das Kästchen, falls das Produkt nicht definiert ist.

$AB =$ $\boxed{}$, $BA =$ $\boxed{}$

Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\alpha(v) = Bv$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils Basen von Kern (α) und Bild (α) und bestimmen Sie den Rang r von α.

Basis von Kern (α): $\boxed{}$, Basis von Bild (α): $\boxed{}$, $r =$ $\boxed{}$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Sei U der von dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannte reelle Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Dimension und $\mathbb{R}^3/U$ und Vektoren in $\mathbb{R}^3$, deren Äquivalenzklassen eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ bilden.

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3/U) =$ $\boxed{}$ Vektoren: $\boxed{}$

Aufgabe 12 (5 *Punkte*) Bestimmen Sie das Inverse von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, protokollieren Sie Ihre Schritte, und schreiben Sie A als Produkt von Elementarmatrizen.

$A^{-1} =$, Protokoll:

$A =$

Aufgabe 13 (5 *Punkte*) Sei X die Menge der reellen Zahlen, die von 0 verschieden sind. Für $x, y \in X$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x \cdot y > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

, $d =$

Aufgabe 14 (2 *Punkte*) Sei $f\colon V \to V$ linear. Es gelte $f(-v) = 4v$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$. Geben Sie einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor w von f an.

$\lambda =$, $w =$

Name, Vorname: **Matrikel-Nummer:** **Studiengang:**

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Summe
Punkte	/1	/4	/2	/3	/3	/8	/5	/6	/4	/8	/3	/5	/5	/2	/59

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass die Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt. *Viel Erfolg!*

Aufgabe 1 (*1 Punkt*)

Name des Tutors/der Tutorin: **Gruppennr.:**

Aufgabe 2 (*4 Punkte*) Bestimmen Sie für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & t \end{pmatrix}$ invertierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse von M.

Invertierbar für $t \in$, $M^{-1} =$

Aufgabe 3 (*2 Punkte*) Sei $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ surjektiv und linear. Bestimmen Sie $d = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}\,(\alpha))$.

$d =$, Begründung:

Aufgabe 4 (*3 Punkte*) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für alle reellen quadratischen Matrizen A gilt $\det(AA^T) \geqq 0$.

Aufgabe 5 (*3 Punkte*) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Matrix A so, dass $\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 - 11x_2 \\ 9x_2 \end{pmatrix}$ gilt. $A =$ ☐

Aufgabe 6 (*8 Punkte*) Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von M, machen Sie die Probe und schreiben Sie M in Diagonalform D.

$\chi_M(t) =$ ☐ , $\lambda_1 =$ ☐ , $\lambda_2 =$ ☐

v_1 zu λ_1	Mv_1	v_2 zu λ_2	Mv_2

, $D =$ ☐

Aufgabe 7 (*5 Punkte*) Sei f eine bijektive lineare Abbildung mit Eigenvektor v zum Eigenwert d. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{d}$ ein Eigenwert von f^{-1} ist. Geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor w an.

☐ , $w =$ ☐

Aufgabe 8 (*6 Punkte*) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie:

$\det(A) =$ ☐ , $\det(A^3) =$ ☐ , $\det(A^{-1}) =$ ☐ , $\det(A^\mathsf{T}) =$ ☐

Aufgabe 9 (*4 Punkte*) Gegeben seien ein reeller Vektorraum V mit Basis u, v, w und eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(u) = v, \varphi(v) = w, \varphi(w) = 2u$.

a) Geben Sie $a = \varphi(u + 4v + 3w)$ als Linearkombination der angegebenen Basisvektoren an.

b) Geben Sie die darstellende Matrix M von φ bezüglich der vorgegebenen Basis von V an:

$a =$ $\boxed{}$, $M =$ $\boxed{}$

Aufgabe 10 (*8 Punkte*) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie, falls definiert, AB und BA. Schreiben Sie n.d. (für nicht definiert) in das Kästchen, falls das Produkt nicht definiert ist.

$AB =$ $\boxed{}$, $BA =$ $\boxed{}$

Sei $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\alpha(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie jeweils Basen von Kern (α) und Bild (α) und bestimmen Sie den Rang r von α.

Basis von Kern (α): $\boxed{}$, Basis von Bild (α): $\boxed{}$, $r =$ $\boxed{}$

Aufgabe 11 (*3 Punkte*) Sei U der von dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannte reelle Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie die Dimension und $\mathbb{R}^3/U$ und Vektoren in $\mathbb{R}^3$, deren Äquivalenzklassen eine Basis von $\mathbb{R}^3/U$ bilden.

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3/U) =$ $\boxed{}$ Vektoren: $\boxed{}$

Aufgabe 12 (5 *Punkte*) Bestimmen Sie das Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, protokollieren Sie Ihre Schritte, und schreiben Sie A als Produkt von Elementarmatrizen.

$A^{-1} =$, Protokoll:

$A =$

Aufgabe 13 (5 *Punkte*) Sei X die Menge der reellen Zahlen, die von 0 verschieden sind. Für $x, y \in X$ definieren wir $x \sim y$ genau dann, wenn $x \cdot y > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Anzahl d der Äquivalenzklassen an.

, $d =$

Aufgabe 14 (2 *Punkte*) Sei $f\colon V \to V$ linear. Es gelte $f(-v) = 5v$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$. Geben Sie einen Eigenwert λ mit zugehörigem Eigenvektor w von f an.

$\lambda =$, $w =$
