**Name, Vorname:** | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /1 | /4 | /1 | /3 | /3 | /1 | /4 | /2 | /3 | /2 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** | **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*)

**(a)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

**(a)**

**(b)**

**Aufgabe 3** (*1 Punkt*) Es gibt $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ Abbildungen von einer Menge mit $a$ Elementen in eine Menge mit $b$ Elementen, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

| | $z = -2$ | $z = 2 + 4\mathrm{i}$ | $z = \dfrac{2+i}{1-i}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Re}(z)$ | | | |
| $\mathrm{Im}(z)$ | | | |
| $\lvert z\rvert$ | | | |

**Aufgabe 5** (*1 Punkt*) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Geben Sie eine surjektive Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $\mathbb{N}$ an.

$$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}\colon \boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

**Aufgabe 6** (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 10\}, \qquad B = \left\{\frac{2}{n} + 3 \mid n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 7\}$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum von $A$, $B$ und $C$:

$$\sup A = \boxed{\phantom{xxxxxx}}, \ \sup B = \boxed{\phantom{xxxxxx}} \ \text{und} \ \sup C = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$$

**Aufgabe 7** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 = 8$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an:

| kartesische Koordinaten | Polarkoordinaten |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 8** (*1 Punkt*) Gegeben seien die Vektoren $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie $v$ als Linearkombination von $v_1$ und $v_2$.

$$v = \boxed{\phantom{xxxxxx}}\, v_1 + \boxed{\phantom{xxxxxx}}\, v_2 .$$

---

**Aufgabe 9** (*4 Punkte*) Beweisen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+2) = n(n+3)$$

Induktionsanfang:

Induktionsvoraussetzung:

Induktionsschritt:

---

**Aufgabe 10** (*2 Punkte*) Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L$ des folgenden linearen Gleichungssystems, als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, in Abhängigkeit von $t$.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad tx_2 &= 0 \\ tx_2 &= 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 11** (*3 Punkte*) Sei $k$ ein Körper. In einem $k$-Vektorraum $V$ sind drei linear unabhängige Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3$ gegeben.

**(a)** Geben Sie die Definition dafür an, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1$ und $v_3$ auch linear unabhängig sind.

**(a)**

**(b)**

---

**Aufgabe 12** (*2 Punkte*) Geben Sie ein Element $a \in \{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ so an, dass die folgende Teilmenge $M$ von $\{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ eine injektive Abbildung $\{1,2,3,4\} \to \{2,3,4,5,6\}$ definiert:

$$M = \{(1,2),(2,4),(4,3),a\}, \qquad a =$$

---

**Aufgabe 13** (*3 Punkte*) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit 3 reellen Unbekannten auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 \phantom{+ x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Geben Sie das Endergebnis an und protokollieren Sie die gemachten Zwischenschritte.

| Ergebnis | elementare Zeilenumformungen |
|---|---|
| | |

| **Name, Vorname:** | | **Matrikel-Nummer:** | | **Studien-gang:** | |
|---|---|---|---|---|---|

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /1 | /4 | /1 | /3 | /3 | /1 | /4 | /2 | /3 | /2 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Viel Erfolg!*

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** **Gruppennr.:**

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*)

**(a)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

**(a)**

**(b)**

**Aufgabe 3** (*1 Punkt*) Es gibt $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ Abbildungen von einer Menge mit $b$ Elementen in eine Menge mit $a$ Elementen, wobei $a, b \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

| | $z = -3$ | $z = 3 + 5\mathrm{i}$ | $z = \dfrac{-2-i}{1-i}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Re}(z)$ | | | |
| $\mathrm{Im}(z)$ | | | |
| $\lvert z\rvert$ | | | |

**Aufgabe 5** (*1 Punkt*) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Geben Sie eine surjektive Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $\mathbb{N}$ an.

$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$: $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$

**Aufgabe 6** (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 < 10\}, \qquad B = \left\{\frac{3}{n} + 4 \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 5\}$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum von $A$, $B$ und $C$:

$\sup A = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$, $\sup B = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ und $\sup C = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

**Aufgabe 7** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 = -8$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an:

| kartesische Koordinaten | Polarkoordinaten |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 8** (*1 Punkt*) Gegeben seien die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie $v$ als Linearkombination von $v_1$ und $v_2$.

$$v = \boxed{\phantom{xxxxx}}\, v_1 + \boxed{\phantom{xxxxx}}\, v_2 .$$

---

**Aufgabe 9** (*4 Punkte*) Beweisen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+3) = n(n+4)$$

| | |
|---|---|
| Induktionsanfang: | |
| Induktionsvoraussetzung: | |
| Induktionsschritt: | |

---

**Aufgabe 10** (*2 Punkte*) Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L$ des folgenden linearen Gleichungssystems, als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, in Abhängigkeit von $t$.

$$\begin{aligned} tx_1 - \quad x_2 &= \ 0 \\ tx_2 &= \ 1 \end{aligned}$$

---

**Aufgabe 11** (*3 Punkte*) Sei $k$ ein Körper. In einem $k$-Vektorraum $V$ sind drei linear unabhängige Vektoren $v_1$, $v_2$ und $v_3$ gegeben.

**(a)** Geben Sie die Definition dafür an, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_2$ und $v_3$ auch linear unabhängig sind.

**(a)**

**(b)**

---

**Aufgabe 12** (*2 Punkte*) Geben Sie ein Element $a \in \{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ so an, dass die folgende Teilmenge $M$ von $\{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ eine injektive Abbildung $\{1,2,3,4\} \to \{2,3,4,5,6\}$ definiert:

$$M = \{(1,4),(2,5),(3,3),a\}, \qquad a =$$

---

**Aufgabe 13** (*3 Punkte*) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit 3 reellen Unbekannten auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Geben Sie das Endergebnis an und protokollieren Sie die gemachten Zwischenschritte.

| Ergebnis | elementare Zeilenumformungen |
|---|---|
| | |

---

**Name, Vorname:** ______ **Matrikel-Nummer:** ______ **Studiengang:** ______

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /1 | /4 | /1 | /3 | /3 | /1 | /4 | /2 | /3 | /2 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** ______ **Gruppennr.:** ______

---

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*)

**(a)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

**(a)**

**(b)**

**Aufgabe 3** (*1 Punkt*) Es gibt $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ Abbildungen von einer Menge mit $c$ Elementen in eine Menge mit $d$ Elementen, wobei $c, d \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

| | $z = -4$ | $z = 2 + 5\mathrm{i}$ | $z = \dfrac{-2+i}{1-i}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Re}(z)$ | | | |
| $\mathrm{Im}(z)$ | | | |
| $\lvert z\rvert$ | | | |

**Aufgabe 5** (*1 Punkt*) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Geben Sie eine surjektive Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $\mathbb{N}$ an.

$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$: $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$

**Aufgabe 6** (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 17\}, \qquad B = \left\{\frac{2}{n} + 5 \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum von $A$, $B$ und $C$:

$\sup A = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$, $\sup B = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ und $\sup C = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

**Aufgabe 7** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 = 27$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an:

| kartesische Koordinaten | Polarkoordinaten |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 8** (*1 Punkt*) Gegeben seien die Vektoren $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie $v$ als Linearkombination von $v_1$ und $v_2$.

$$v = \boxed{\phantom{xxxxx}}\, v_1 + \boxed{\phantom{xxxxx}}\, v_2 \,.$$

---

**Aufgabe 9** (*4 Punkte*) Beweisen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k) = n(n+1)$$

| | |
|---|---|
| Induktionsanfang: | |
| Induktionsvoraussetzung: | |
| Induktionsschritt: | |

---

**Aufgabe 10** (*2 Punkte*) Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L$ des folgenden linearen Gleichungssystems, als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, in Abhängigkeit von $t$.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= 1 \\ t x_2 &= 1 \end{aligned}$$

---

**Aufgabe 11** (*3 Punkte*) Sei $k$ ein Körper. In einem $k$-Vektorraum $V$ sind drei linear unabhängige Vektoren $u$, $v$ und $w$ gegeben.

**(a)** Geben Sie die Definition dafür an, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $u$ und $w$ auch linear unabhängig sind.

**(a)**

**(b)**

---

**Aufgabe 12** (*2 Punkte*) Geben Sie ein Element $a \in \{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ so an, dass die folgende Teilmenge $M$ von $\{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ eine injektive Abbildung $\{1,2,3,4\} \to \{2,3,4,5,6\}$ definiert:

$$M = \{(1,3),(4,4),(2,6),a\}, \qquad a =$$

---

**Aufgabe 13** (*3 Punkte*) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit 3 reellen Unbekannten auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Geben Sie das Endergebnis an und protokollieren Sie die gemachten Zwischenschritte.

| Ergebnis | elementare Zeilenumformungen |
|---|---|
| | |

**Name, Vorname:** | **Matrikel-Nummer:** | **Studien-gang:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /3 | /1 | /4 | /1 | /3 | /3 | /1 | /4 | /2 | /3 | /2 | /3 | /31 |

Bitte beachten Sie die folgenden **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 90 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Zwei eigenhändig handbeschriebene Seiten DIN A4.
- Wer den Klausurraum vor Ende der Bearbeitungszeit endgültig verlässt, hat damit zu rechnen, dass seine Klausur als nicht bestanden gewertet wird.
- Eintragungen mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
- Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.
- Folgende Werte der Winkelfunktionen könnten hilfreich sein:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $0$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos(x)$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $-1$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Viel Erfolg!*

---

**Aufgabe 1** (*1 Punkt*) Bitte geben Sie den Namen Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin und die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.

**Name des Tutors/der Tutorin:** | **Gruppennr.:**

---

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*)

**(a)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

**(a)**

**(b)**

**Aufgabe 3** (*1 Punkt*) Es gibt $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ Abbildungen von einer Menge mit $d$ Elementen in eine Menge mit $c$ Elementen, wobei $c, d \in \mathbb{N}$.

---

**Aufgabe 4** (*4 Punkte*) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag folgender komplexer Zahlen:

| | $z = -5$ | $z = 3 + 6\mathrm{i}$ | $z = \dfrac{2-i}{1-i}$ |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{Re}(z)$ | | | |
| $\operatorname{Im}(z)$ | | | |
| $\lvert z\rvert$ | | | |

---

**Aufgabe 5** (*1 Punkt*) Sei $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$. Geben Sie eine surjektive Abbildung von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nach $\mathbb{N}$ an.

$f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$: $\boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$

---

**Aufgabe 6** (*3 Punkte*) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 < 7\}, \qquad B = \left\{ \frac{2}{n} + 2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

Bestimmen Sie jeweils das Supremum von $A$, $B$ und $C$:

$\sup A = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$, $\sup B = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$ und $\sup C = \boxed{\phantom{xxxxxx}}$

---

**Aufgabe 7** (*3 Punkte*) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen von $z^3 = -27$. Geben Sie diese jeweils in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an:

| kartesische Koordinaten | Polarkoordinaten |
|---|---|
| | |

**Aufgabe 8** (*1 Punkt*) Gegeben seien die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Schreiben Sie $v$ als Linearkombination von $v_1$ und $v_2$.

$$v = \boxed{\phantom{xxxxxx}}\, v_1 + \boxed{\phantom{xxxxxx}}\, v_2 .$$

---

**Aufgabe 9** (*4 Punkte*) Beweisen Sie folgende Aussage mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k+1) = n(n+2)$$

| | |
|---|---|
| Induktionsanfang: | |
| Induktionsvoraussetzung: | |
| Induktionsschritt: | |

---

**Aufgabe 10** (*2 Punkte*) Sei $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L$ des folgenden linearen Gleichungssystems, als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, in Abhängigkeit von $t$.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &= -1 \\ t x_2 &= -1 \end{aligned}$$

---

**Aufgabe 11** (*3 Punkte*) Sei $k$ ein Körper. In einem $k$-Vektorraum $V$ sind drei linear unabhängige Vektoren $u$, $v$ und $w$ gegeben.

**(a)** Geben Sie die Definition dafür an, dass diese drei Vektoren linear unabhängig sind.

**(b)** Zeigen Sie, dass die Vektoren $v$ und $w$ auch linear unabhängig sind.

**(a)**

**(b)**

**Aufgabe 12** (*2 Punkte*) Geben Sie ein Element $a \in \{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ so an, dass die folgende Teilmenge $M$ von $\{1,2,3,4\} \times \{2,3,4,5,6\}$ eine injektive Abbildung $\{1,2,3,4\} \to \{2,3,4,5,6\}$ definiert:

$$M = \{(1,5),(2,6),(4,4),a\}, \qquad a = \boxed{\phantom{xxxx}}$$

**Aufgabe 13** (*3 Punkte*) Bringen Sie das lineare Gleichungssystem mit 3 reellen Unbekannten auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Geben Sie das Endergebnis an und protokollieren Sie die gemachten Zwischenschritte.

| Ergebnis | elementare Zeilenumformungen |
|---|---|
| | |