Aufgabe 1

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume und $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann gilt für eine Basis $v_1, ..., v_n$ von V:

a) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist eine Basis von W.

b) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist ein linear abhängiges Erzeugendensystem von W.

c) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

Die richtige Antwort ist ☒ a) ○ b) ○ c)

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume und $f : V \to W$ ein Epimorphismus, aber kein Monomorphismus. Dann gilt für eine Basis $v_1, ..., v_n$ von V:

a) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist eine Basis von W.

b) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist ein linear abhängiges Erzeugendensystem von W.

c) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

Die richtige Antwort ist ○ a) ☒ b) ○ c)

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume und $f : V \to W$ ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus. Dann gilt für eine Basis $v_1, ..., v_n$ von V:

a) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist eine Basis von W.

b) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist ein linear abhängiges Erzeugendensystem von W.

c) $f(v_1), ..., f(v_n)$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

Die richtige Antwort ist ○ a) ○ b) ☒ c)

Aufgabe 2

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume, $\dim V = n$ und $\dim W = m$ mit $n \leq m$. Dann gibt es einen Monomorphismus $f : V \to W$.

☒ wahr ○ falsch

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume, $\dim V = n$ und $\dim W = m$ mit $n > m$. Dann gibt es einen Monomorphismus $f : V \to W$.

○ wahr ☒ falsch

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume, $\dim V = n$ und $\dim W = m$ mit $n \geq m$. Dann gibt es einen Epimorphismus $f : V \to W$.

☒ wahr ○ falsch

Sei k ein Körper. V und W seien k-Vektorräume, $\dim V = n$ und $\dim W = m$ mit $n < m$. Dann gibt es einen Epimorphismus $f : V \to W$.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 3

Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 von $\mathbb{R}^4$ ist

○ ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus ○ ein Epimorphismus, aber kein Monomorphismus
☒ ein Isomorphismus ○ keines davon.

Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 von $\mathbb{R}^4$ ist

○ ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus ○ ein Epimorphismus, aber kein Monomorphismus
○ ein Isomorphismus ☒ keines davon.

Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 von $\mathbb{R}^4$ ist

○ ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus ○ ein Epimorphismus, aber kein Monomorphismus
○ ein Isomorphismus ☒ keines davon.

Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 von $\mathbb{R}^4$ ist

○ ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus ○ ein Epimorphismus, aber kein Monomorphismus
☒ ein Isomorphismus ○ keines davon.

Aufgabe 4

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

☒ wahr ○ falsch

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

○ wahr ☒ falsch

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

○ wahr ☒ falsch

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 5

Geben Sie den Wert x_{11} der Matrix $X = A^{-1}$ an, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1

Geben Sie den Wert x_{12} der Matrix $X = A^{-1}$ an, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

-2

Geben Sie den Wert x_{13} der Matrix $X = A^{-1}$ an, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

-1

Geben Sie den Wert x_{14} der Matrix $X = A^{-1}$ an, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3

Aufgabe 6

Der Kern einer linearen Abbildung ist die Lösungsmenge eines LGS.

☒ wahr ○ falsch

Sei k ein Körper. Der Kern einer linearen Abbildung $f : k^n \to k^m$ mit $f(x) = Ax$ für ein $A \in Mat(n \times m, k)$ ist die Menge aller Vektoren y, für die das LGS $Ax = y$ eine Lösung besitzt.

○ wahr ☒ falsch

Sei k ein Körper. Das Bild einer linearen Abbildung $f : k^n \to k^m$ mit $f(x) = Ax$ für ein $A \in Mat(n \times m, k)$ ist die Menge aller Vektoren y, für die das LGS $Ax = y$ eine Lösung besitzt.

☒ wahr ○ falsch

Sei k ein Körper. Das Bild einer linearen Abbildung $f : k^n \to k^m$ mit $f(x) = Ax$ für ein $A \in Mat(n \times m, k)$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$.

○ immer wahr ☒ im Allgemeinen falsch

Aufgabe 7

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim W$.

○ immer wahr ☒ im Allgemeinen falsch

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim \mathrm{Bild}(f) = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim V$.

○ immer wahr ☒ im Allgemeinen falsch

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim V = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f)$.

☒ immer wahr ○ im Allgemeinen falsch

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt $\dim W = \dim \mathrm{Kern}(f) + \dim \mathrm{Bild}(f)$.

○ immer wahr ☒ im Allgemeinen falsch

Aufgabe 8

Der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von V.

☒ wahr ○ falsch

Der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von W.

○ wahr ☒ falsch

Das Bild einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von V.

○ wahr ☒ falsch

Das Bild einer linearen Abbildung $f : V \to W$ ist ein Untervektorraum von W.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 9

Sei f die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Dimension des Kerns von f an.

$\boxed{0}$

Sei f die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Dimension des Kerns von f an.

$\boxed{1}$

Sei f die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Dimension von $\mathrm{Bild}(f)$ an.

$\boxed{2}$

Sei f die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit darstellender Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis e_1, e_2, e_3 des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie die Dimension von $\mathrm{Bild}(f)$ an.

$\boxed{3}$

Aufgabe 10

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim V = \dim W$. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ein Monomorphismus genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist.

☒ wahr ◯ falsch

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim V = \dim W$. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ein Epimorphismus genau dann, wenn f ein Isomorphismus ist.

☒ wahr ◯ falsch

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim V = \dim W$. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ein Monomorphismus genau dann, wenn f ein Epimorphismus ist.

☒ wahr ◯ falsch

Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume mit $\dim V = \dim W$. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ein Epimorphismus genau dann, wenn f ein Monomorphismus ist.

☒ wahr ◯ falsch