Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Polynom $(x^4 - x^3 + 7x^2 - 9x + 2) : (x - 1) \in \mathbb{Z}[x]$. Geben Sie das Ergebnis ohne Klammern um negative Zahlen an. Die Koeffizienten 0 und 1 müssen auch eingetragen werden.

$\boxed{0}\,x^4 + \boxed{1}\,x^3 + \boxed{0}\,x^2 + \boxed{7}\,x + \boxed{-2}.$

Bestimmen Sie das Polynom $(x^4 - x^3 + 7x^2 - 5x - 2) : (x - 1) \in \mathbb{Z}[x]$. Geben Sie das Ergebnis ohne Klammern um negative Zahlen an. Die Koeffizienten 0 und 1 müssen auch eingetragen werden.

$\boxed{0}\,x^4 + \boxed{1}\,x^3 + \boxed{0}\,x^2 + \boxed{7}\,x + \boxed{2}.$

Bestimmen Sie das Polynom $(x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x + 2) : (x + 1) \in \mathbb{Z}[x]$. Geben Sie das Ergebnis ohne Klammern um negative Zahlen an. Die Koeffizienten 0 und 1 müssen auch eingetragen werden.

$\boxed{0}\,x^4 + \boxed{1}\,x^3 + \boxed{0}\,x^2 + \boxed{7}\,x + \boxed{2}.$

Bestimmen Sie das Polynom $(x^4 + x^3 - 7x^2 - 5x + 2) : (x + 1) \in \mathbb{Z}[x]$. Geben Sie das Ergebnis ohne Klammern um negative Zahlen an. Die Koeffizienten 0 und 1 müssen auch eingetragen werden.

$\boxed{0}\,x^4 + \boxed{1}\,x^3 + \boxed{0}\,x^2 + \boxed{-7}\,x + \boxed{2}.$

Aufgabe 2

X_0

Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom. Ist $p(x)$ ohne Rest durch $x - x_0$ teilbar, dann ist $x - x_0$ eine Nullstelle von p.

☒ wahr ○ falsch

Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom mit Nullstelle x_0. Dann ist $p(x)$ ohne Rest durch $x - x_0$ teilbar.

☒ wahr ○ falsch

Sei $0 \neq p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad n mit Nullstelle x_0. Dann ist $\frac{p(x)}{x - x_0} \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad n.

○ wahr ☒ falsch

Sei $0 \neq p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad n mit Nullstelle x_0. Dann ist $\frac{p(x)}{x - x_0} \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom vom Grad $n - 1$.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist V ein Ring.

○ immer wahr ⊗ manchmal auch falsch

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Abbildung $\cdot : V \times V \to V$. Dann ist V ein Ring.

○ immer wahr ⊗ manchmal auch falsch

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer assoziativen Abbildung $\cdot : V \times V \to V$. Dann ist V ein Ring.

○ immer wahr ⊗ manchmal auch falsch

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer assoziativen Abbildung $\cdot : V \times V \to V$. Dann ist V ein Körper.

○ immer wahr ⊗ manchmal auch falsch

Aufgabe 4

$\mathbb{Z}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Q}$.

○ wahr ⊗ falsch

$\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{R}$.

⊗ wahr ○ falsch

$\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vekorraum bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{C}$.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 5

Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 3\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

○ wahr ⊗ falsch

Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

⊗ wahr ○ falsch

Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 7x - 4\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

○ wahr ⊗ falsch

Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 8x\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 6

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $U \subset V$. Dann ist U ein K-Vektorraum.

○ wahr ⊗ falsch

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, $U \subset V, U \neq \emptyset$. Dann ist U ein K-Vektorraum.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 7

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann ist $\{0\}$ ein Untervektorraum von V.

⊗ wahr ○ falsch

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist K^n ein K-Vektorraum.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 8

Der Polynomring $\mathbb{R}[x]$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

☒ wahr ○ falsch

Der Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

☒ wahr ○ falsch

Der Polynomring $\mathbb{Z}[x]$ ist ein $\mathbb{Z}$-Vektorraum.

○ wahr ☒ falsch

Der Polynomring $\mathbb{C}[x]$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 1 \end{aligned}$$

○ ist ein homogenes Gleichungssystem. ☒ ist ein inhomogenes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} ax + by &= -1 \\ cx + dy &= 1 \end{aligned}$$

○ ist ein homogenes Gleichungssystem. ☒ ist ein inhomogenes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} ax + by &= 7 \\ cx + dy &= 5 \end{aligned}$$

○ ist ein homogenes Gleichungssystem. ☒ ist ein inhomogenes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

☒ ist ein homogenes Gleichungssystem. ○ ist ein inhomogenes Gleichungssystem.

Aufgabe 10

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 6x + y &= 0 \\ 7y &= 0 \end{aligned}$$

○ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. ⊗ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$. ○ hat mehrere Lösungen in $\mathbb{R}$.

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 6x + y &= 0 \\ 6x + 7y &= 0 \end{aligned}$$

○ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. ⊗ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$. ○ hat mehrere Lösungen in $\mathbb{R}$.

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 6x + 2y &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}$$

○ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. ○ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$. ⊗ hat mehrere Lösungen in $\mathbb{R}$.

Das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 6x + 42y &= 0 \\ x + 7y &= 0 \end{aligned}$$

○ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. ○ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}$. ⊗ hat mehrere Lösungen in $\mathbb{R}$.