Aufgabe 1

Sei $n \geq 2$. Dann ist die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $A \mapsto \det(A)$ surjektiv.

☒ wahr ○ falsch

Sei $n \geq 2$. Dann ist die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $A \mapsto \det(A)$ injektiv.

○ wahr ☒ falsch

Sei $n \geq 2$. Dann ist $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $A \mapsto \det(A)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

○ wahr ☒ falsch

Sei $n \geq 2$. Dann ist die Abbildung $\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $A \mapsto \det(A)$ weder surjektiv noch injektiv.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 2

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $f \colon V \to V$ mit Eigenwert 0.

○ wahr ☒ falsch

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es einen Epimorphismus $f \colon V \to V$ mit Eigenwert 0.

○ wahr ☒ falsch

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es einen Monomorphismus $f \colon V \to V$ mit Eigenwert 0.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 3

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann ist auch $\det(A^s) \neq 0\ \forall s \in \mathbb{N}$.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann ist auch $\det(A + A) \neq 0$.

☒ wahr ◯ falsch

Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ so, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $\det(A^s) \neq 0$ gibt. Dann ist auch $\det(A) \neq 0$.

☒ wahr ◯ falsch

Aufgabe 4

Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ nach Definition genau dann ein Eigenwert von α, wenn $\alpha(v) = \lambda \cdot v$ für alle $v \in V$ gilt.

◯ wahr ☒ falsch

Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $\lambda \in K$ nach Definition genau dann ein Eigenwert von α, wenn $\exists v \neq 0$ in V mit $\alpha(v) = \lambda \cdot v$.

☒ wahr ◯ falsch

Aufgabe 5

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat einen Eigenwert.

☒ wahr ○ falsch

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat genau einen Eigenwert.

☒ wahr ○ falsch

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat mindestens zwei verschiedene Eigenwerte.

○ wahr ☒ falsch

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Allgemeinen keine Eigenwerte.

○ wahr ☒ falsch

Aufgabe 6

Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $0 \in K$ Eigenwert von α genau dann, wenn $\mathrm{Kern}(\alpha) \neq \{0\}$.

☒ wahr ○ falsch

Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $0 \in K$ Eigenwert von α genau dann, wenn α nicht injektiv ist.

☒ wahr ○ falsch

Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $0 \in K$ Eigenwert von α genau dann, wenn $\mathrm{Bild}(\alpha) = \{0\}$.

○ wahr ☒ falsch

Sei V ein K-Vektorraum und $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann ist $0 \in K$ Eigenwert von α genau dann, wenn α kein Isomorphismus ist.

☒ wahr ○ falsch (falls V endlich-dimensional)

○ wahr ☒ falsch (falls $\dim V = \infty$)

Aufgabe 7

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$ ein Eigenvektor von α zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $2v$ ein Eigenvektor von α zum Eigenwert 2λ.

○ wahr ⊗ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung und $v \in V$ ein Eigenvektor von α zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $2v$ ein Eigenvektor von α zum Eigenwert λ.

⊗ wahr ○ falsch

Aufgabe 8

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, hat den Eigenwert 1.

⊗ wahr ○ falsch

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, hat den Eigenwert -1.

○ wahr ⊗ falsch

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, hat den Eigenwert 2.

⊗ wahr ○ falsch

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, hat den Eigenwert -2.

○ wahr ⊗ falsch

Aufgabe 9

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{Q}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, hat genau zwei unterschiedliche Eigenwerte.

☒ wahr ○ falsch

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{Q}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, hat genau einen Eigenwert.

○ wahr ☒ falsch

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{Q}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, hat keine Eigenwerte.

○ wahr ☒ falsch

Die lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, die bezüglich der Standardbasis in $\mathbb{Q}^2$ gegeben ist durch $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

☒ wahr ○ falsch

Aufgabe 10

Seien $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = e_1$. Dann hat f den Eigenwert 1.

☒ wahr ○ falsch

Seien $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = e_1$. Dann hat f den Eigenwert -1.

☒ wahr ○ falsch

Seien $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(e_1) = e_2$ und $f(e_2) = -e_1$. Dann hat f den Eigenwert 1.

○ wahr ☒ falsch

Seien $\{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $f(e_1) = -e_2$ und $f(e_2) = e_1$. Dann hat f den Eigenwert -1.

○ wahr ☒ falsch