Aufgabe 1

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{Q}$.

◯ wahr ◯ falsch

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{R}$.

◯ wahr ◯ falsch

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{C}$.

◯ wahr ◯ falsch

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind ein $\mathbb{R}$-Vektorraum bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{R}$.

◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 2

Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[X]$ ein K-Vektorraum bezüglich der üblichen Multiplikation von Polynomen mit Skalaren und $\forall n \geq 1$ existiert eine Menge mit n linear unabhängigen Vektoren in $K[X]$.

◯ wahr ◯ falsch

Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[X]$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum bezüglich der üblichen Multiplikation von Polynomen mit Skalaren.

◯ wahr ◯ falsch

Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[X]$ ein K-Vektorraum bezüglich der üblichen Multiplikation von Polynomen mit Skalaren, der von der Menge $\{1, X\}$ erzeugt wird.

◯ wahr ◯ falsch

Sei K ein Körper. Dann ist der Polynomring $K[X]$ ein K-Vektorraum bezüglich der üblichen Multiplikation von Polynomen mit Skalaren, der nicht von endlich vielen Vektoren erzeugt werden kann.

◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 3

Jeder Vektor $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^2$ erzeugt einen 1-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^2$.

○ wahr ○ falsch

Ein Vektor v in $\mathbb{R}^2$ erzeugt einen 1-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^2$ genau dann, wenn $v \neq 0$.

○ wahr ○ falsch

Aufgabe 4

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig.

○ wahr ○ falsch

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig.

○ wahr ○ falsch

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ erzeugen einen 2-dimensionalen Unterraum.

○ wahr ○ falsch

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

○ wahr ○ falsch

Aufgabe 5

Sei $B := \{x, y, z\}$ eine Menge mit drei verschiedenen Elementen in $\mathbb{Q}^2$. Dann erzeugt B den Vektorraum $\mathbb{Q}^2$.

○ wahr ○ falsch

Sei $B := \{x, y, z\}$ eine Menge mit drei verschiedenen Elementen in $\mathbb{Q}^2$. Dann ist B keine Basis von $\mathbb{Q}^2$.

○ wahr ○ falsch

Sei $B := \{x, y\}$ eine Menge mit zwei verschiedenen Elementen in $\mathbb{Q}^2$. Dann ist B eine Basis für $\mathbb{Q}^2$, falls B nicht den Nullvektor enthält.

○ wahr ○ falsch

Sei $B := \{x, y, z\}$ eine Menge mit drei verschiedenen Elementen in $\mathbb{Q}^2$. Dann erzeugt B einen Unterraum von $\mathbb{Q}^2$ der Dimension größer oder gleich eins.

○ wahr ○ falsch

Aufgabe 6

Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ beschreibt einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

○ wahr ○ falsch

Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ beschreibt einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

○ wahr ○ falsch

Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\}$ beschreibt einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

○ wahr ○ falsch

Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + 2z, z = -x\}$ beschreibt einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

○ wahr ○ falsch

Aufgabe 7

Sei V ein Vektorraum. Jede Basis von V ist auch ein Erzeugendensystem.

◯ wahr ◯ falsch

Sei V ein Vektorraum. Jedes Erzeugendensystem von V ist auch eine Basis.

◯ wahr ◯ falsch

Sei V ein Vektorraum. Ein Erzeugendensystem von V ist eine Basis genau dann, wenn es unverkürzbar ist.

◯ wahr ◯ falsch

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Jede Basis von V hat dieselbe Anzahl an Elementen.

◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 8

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $v, w \in V$. Sind v und w linear unabhängig, so sind auch v und $v + w$ linear unabhängig.

◯ wahr ◯ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $v, w \in V$. Sind v und w linear unabhängig, so sind auch $v - w$ und $v + w$ linear unabhängig.

◯ wahr ◯ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $v, w \in V$. Sind v und w linear abhängig, so sind auch v und $v + w$ linear abhängig.

◯ wahr ◯ falsch

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $v, w \in V$. Sind v und w linear unabhängig, so sind v und $v+w$ im Allgemeinen nicht linear unabhängig.

◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 9

Seien U und W Unterräume eines Vektorraumes V. Dann ist auch $U \cup W$ ein Unterraum von V.

○ wahr ○ falsch

Seien U und W Unterräume eines Vektorraumes V. Dann ist auch $U \cap W$ ein Unterraum von V.

○ wahr ○ falsch

Aufgabe 10

Sei $\mathbb{F}_2$ ein Körper mit zwei Elementen. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ hat nur endlich viele Elemente.

○ wahr ○ falsch

Sei $\mathbb{F}_2$ ein Körper mit zwei Elementen. Jeder Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ hat nur endlich viele Elemente.

○ wahr ○ falsch

Sei $\mathbb{F}_2$ ein Körper mit zwei Elementen. Jeder 2-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ hat genau 4 Elemente.

○ wahr ○ falsch

Sei $\mathbb{F}_2$ ein Körper mit zwei Elementen. Jeder 2-dimensionale Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ hat genau 2 Elemente.

○ wahr ○ falsch