Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Gruppenübung 9

Aufgabe 33

Sei $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der reellwertigen Polynome vom Grad kleiner gleich n.

a) Geben Sie einen Isomorphismus $\mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}^3$ an.

b) Zeigen Sie, dass die Polynome $(x-1)^i$ für $i \geq 0$ eine Basis des Polynomringes $\mathbb{R}[x]$ bilden.

c) Berechnen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[x]_{\leq n} &\to \mathbb{R}[x]_{\leq n} \\ x^i &\mapsto (x-1)^i \quad \text{für } i = 0, ..., n. \end{aligned}$$

bezüglich der Basis $1, x, ..., x^n$ von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.

Aufgabe 34 (schriftlich)

a) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x + 1$, als Abbildung zwischen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen.

(ii) $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_2(z) = \overline{z}$ als Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

(iii) $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f_3(z) = \overline{z}$ als Abbildung zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

(iv) $f_4 : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], f_4(p) = p'$ als Abbildung zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Hier bezeichnet p' die Ableitung eines Polynomes nach x.

b) Schreiben Sie folgende Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen und bestimmen Sie jeweils die inverse Matrix:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Machen Sie die Probe, dass $A \cdot A^{-1} = E_3$ gilt.

Aufgabe 35

Eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ erfülle die Gleichungen

$$g(1, 1) = (1, 2, 3) \text{ und } g(1, 7) = (1, 0, 1).$$

Begründen Sie, dass g eindeutig bestimmt ist und bestimmen Sie $g(x, y)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 36

a) Sei $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung zwischen zwei k-Vektorräumen V und W. Zeigen Sie, dass auch die Umkehrfunktion von f linear ist.

b) Berechnen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_3).$$

Aufgabe 37

Wir definieren die lineare Abbildung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_2 - x_3, x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_3)$$

i) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Einheitsbasen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$.

ii) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der Basen

$$B = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)) \text{ von } \mathbb{R}^3$$

und

$$B' = ((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)) \text{ von } \mathbb{R}^4.$$