Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Gruppenübung 8

Aufgabe 29 (schriftlich)

Wir definieren $C := \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ als Teilmenge des Ringes der reellen 2×2-Matrizen $Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass C ein Teilring von $Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $X^2 + E_2 = 0$ in C.

c) Zeigen Sie, dass C ein Körper ist.

Aufgabe 30

In dieser Aufgabe verwenden wir die Elementarmatrizen in $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ wie sie in der Vorlesung definiert wurden.

a) Berechnen Sie $E_i^j \cdot E_l^k$

b) Zeigen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\lambda \neq 0$:
$Q_i^j(\lambda) = S_j(\frac{1}{\lambda}) \cdot Q_i^j \cdot S_j(\lambda)$ und
$P_i^j = Q_j^i \cdot Q_i^j(-1) \cdot Q_j^i \cdot S_j(-1)$.

Hinweis: Interpretieren Sie die Multiplikationen in b) als Zeilen- oder Spaltenumformungen wie in der Vorlesung beschrieben.

Aufgabe 31

Für ein beliebiges natürliches $n \geq 1$ sei $a := \frac{2\pi}{n}$.
Wir definieren $D(a) := \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$ und $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

a) $D(a)^n = S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $S^{-1}D(a)S = D(a)^{-1}$.

b) Wir definieren die Menge $D := \{D(a)^j, D(a)^j S \mid j = 0, ..., n-1\}$.
Zeigen Sie, dass D genau $2n$ Elemente hat und dass mit $X, Y \in D$ auch $XY \in D$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen die Additionstheoreme des Cosinus und Sinus verwenden:
$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$
$\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$.

Aufgabe 32

Zeigen Sie für folgende Teilmenge Z der reellen $n \times n$ Matrizen $Mat(n \times n, \mathbb{R})$ die Identität:
$Z := \{B \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) \mid BA = AB$ für alle A $\in Mat(n \times n, \mathbb{R})\} = \{aE_n \mid a \in \mathbb{R}\}$,
wobei hier E_n die $n \times n$ Einheitsmatrix bezeichnet.
Hinweis: Setzen Sie für A verschiedene Matrizen ein, z.B. Elementarmatrizen.

Von den 20 Punkten für die schriftliche Aufgabe sind wegen der Scheinklausur nur 10 Punkte für den Schein relevant. Die restlichen 10 Punkte sind Bonuspunkte.

Scheinklausur am 13.12.2014 um 13 Uhr, Dauer 90 Minuten

Die Raumaufteilung für die Klausur ist nach Übungsgruppen gestaffelt:
In V53.01 sind die Gruppen 1, 10, 11, 12, 13 und 22.
In V47.01 sind die Gruppen 3, 4, 5, 6 und 25.
In V47.02 sind die Gruppen 16, 18 und 19.
In V47.03 sind die Gruppen 14 und 17.
In V7.02 sind die Gruppen 20 und 24.

Die Räume sind ab 12 Uhr geöffnet. Seien Sie bitte pünktlich um 13 Uhr auf Ihrem Platz im Hörsaal. Jacken und Taschen gehören auf den Boden. Ihren Studentenausweis, eigenes Papier für Notizen, Stifte und eventuell Essen und Trinken legen Sie bitte vor Beginn der Klausur auf den Tisch.

Im Hörsaal wird jede 2. Reihe frei gelassen; zwischen je zwei Studenten bleiben 2 Plätze frei. Zu besetzende Reihen werden durch einen heruntergeklappten Tisch am Rand markiert.

Zugelassene Hilfsmittel: 2 handbeschriebene DIN A4 Seiten.
Nicht erlaubt sind Taschenrechner, Handys, Laptops etc.

Diese Regeln stehen auch auf der Webseite, auf der es nun auch eine Abfragemöglichkeit für den Raum der Scheinklausur gibt.

Die Klausur wird am 17.12.2014 um 17:30 Uhr in V47.01 in Form einer Sondervorlesung bzw. Sonderübung besprochen.