Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

**Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys**

WS 2014/15

# Gruppenübung 6

## Aufgabe 21 (schriftlich)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme, als Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ (in (i) und (ii)) bzw. als Teilmenge von $\mathbb{R}^4$ (in (iii)).

(i) $$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 5x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.

c) Schreiben Sie die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren aus b).

## Aufgabe 22

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gegebene Zahlen. Beweisen Sie folgende Aussage über das lineare Gleichungssystem $\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= y_1 \\ cx_1 + dx_2 &= y_2 \end{aligned}$ :
Für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ existiert eine eindeutige Lösung $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$.

## Aufgabe 23

Es seien Metall-Legierungen $M_1, M_2$ und $M_3$ gegeben, die alle Kupfer, Silber und Gold enthalten, und zwar in folgenden Prozentsätzen:
$M_1$ bestehe zu 20% aus Kupfer, zu 60% aus Silber und zu 20% aus Gold,
$M_2$ bestehe zu 70% aus Kupfer, zu 10% aus Silber und zu 20% aus Gold,
$M_3$ bestehe zu 50% aus Kupfer, zu 50% aus Silber und zu 0% aus Gold.
Kann man diese Legierungen so mischen, dass eine Legierung entsteht, die 40% Kupfer, 50% Silber und 10% Gold enthält?

## Aufgabe 24

a) Es seien 3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ gegeben und je 2 davon seien linear unabhängig. Sind dann auch alle 3 Vektoren linear unabhängig? Geben Sie ein Gegenbeispiel oder beweisen Sie diese Aussage.

b) In einem Vektorraum sind n Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n$ gegeben. Wir definieren $b_i := \sum_{k=1}^{i} a_k$ für $i = 1, ..., n$. Zeigen Sie für beliebiges $n \geq 1$:
Die Vektoren $a_1, a_2, ..., a_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $b_1, b_2, ..., b_n$ linear unabhängig sind.