Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Gruppenübung 5

Aufgabe 17

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $g \circ f : X \to Z$ injektiv, dann muss auch f injektiv sein.

b) Ist $g \circ f : X \to Z$ surjektiv, dann muss auch g surjektiv sein.

Gelten die Umkehrungen auch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 18

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x + ty &= 0 \\ tx + y &= 0 \end{aligned}$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 19 (schriftlich)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen U Untervektorräume von $V = \mathbb{R}^3$ sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

a) $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$

b) $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2 = -x_3 \}$

c) $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0, x_1 + x_3 = 5 \}$

d) $U = \mathbb{R} \times \{1\} \times \mathbb{R}$

e) $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \}$

f) $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2x_2, x_3 = x_1^2 \}$

Aufgabe 20

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Geraden durch den Ursprung Untervektorräume sind. Diese Geraden kann man durch ihren Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ bestimmen:

$$G_v := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda v\}$$

In dieser Aufgabe geht es um Geraden in der Ebene. Zeigen Sie für $n = 2$:

a) Für $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt: $G_v = G_w$ oder $G_v \cap G_w = \{0\}$.

b) Falls $G_v \cap G_w = \{0\}$, so existieren für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ eindeutige Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda v + \mu w$.