Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul



# Gruppenübung 4

## Aufgabe 13 (schriftlich)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und das komplex Konjugierte folgender komplexer Zahlen:

   i) $\frac{2-3i}{2+i}$

   ii) $(\frac{1}{1+i})^3$

   iii) $(2+i)^n$, mit $n \in \mathbb{N}$.

b) Testen Sie folgende Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität und bestimmen Sie anschließend die Menge $f^{-1}(a) := f^{-1}(\{a\}) := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \{a\}\}$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{C}$:

   i) $f(z) = \overline{z}$

   ii) $f(z) = i \cdot z$

   iii) $f(z) = z^2 + 1$

   iv) $f(z) = \frac{z}{|z|}$

## Aufgabe 14

Bestimmen Sie alle Lösungen folgender Gleichungen:

a) $z^n = 5$, für $n \in \mathbb{N}$. Skizzieren Sie die Lösungsmenge für $n = 4$ in der Zahlenebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) $z^2(z^2+1) - 16 = 0$. Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Zahlenebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

c) $z^4 + rz^3 + sz^2 + rz + 1 = 0$, mit $r, s \in \mathbb{C}$.

(Hinweis zu c): Benutzen Sie die Substitution $y = z + \frac{1}{z}$.)

## Aufgabe 15

Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

a) $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) + Im(z) = 1\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(\frac{1}{z}) = \frac{1}{2}, z \neq 0\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 - Re(z)\}$

**Aufgabe 16**

a) Seien $(R,+,\cdot)$ und $(S,+',\cdot')$ Ringe. Zeigen Sie, dass dann $(R\times S,\oplus,\star)$ ein Ring ist, wobei

$$(r,s)\oplus(r',s')=(r+r',s+'s') \text{ und } (r,s)\star(r',s')=(r\cdot r',s\cdot' s')$$

gilt.

b) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x^2=x$ in dem Ring $\mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2$?

c) In einem Ring $R$ gelte die Gleichung $x^2=x$ für alle $x\in R$.
Zeigen Sie, dass R kommutativ ist.

Hinweis: Setzen Sie für $x$ zuerst $x=a+1$ ein und folgern Sie: $2a=0$. Setzen Sie dann $x=a+b$ ein und folgern Sie $ab=-ba$, für $a,b\in R$.