Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

WS 2014/15

Gruppenübung 3

Aufgabe 9 (schriftlich)

a) Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $S \subset R$ eine Teilmenge. Zeigen Sie: $(S, +, \cdot)$ ist ein Teilring, d.h. S ist ein Ring bzgl. der Verknüpfungen in R, falls gilt:

(S1) $\forall s \in S$ gilt: $-s \in S$

(S2) $\forall s, t \in S$ gilt: $s + t \in S$

(S3) $\forall s, t \in S$ gilt: $s \cdot t \in S$.

(S4) $1 = 1_R \in S$, wobei 1_R das neutrale Element in R bezeichnet.

b) Zeigen Sie, dass folgende Mengen Ringe sind.

(i) $\mathbb{Z}$

(ii) $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q = 2^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{Q}$

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$

(iv) $\mathbb{R}[x]$.

Welche dieser Ringe sind Körper?

Aufgabe 10

Gegeben sei ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, mit ganzzahligen Koeffizienten und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Ist z eine ganzzahlige Nullstelle von P, so wird a_0 von z geteilt.

b) Berechnen Sie jeweils die Nullstellen folgender Polynome:

(i) $x^3 + 6x^2 + 6x + 5$

(ii) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$.

Aufgabe 11

Seien zwei natürliche Zahlen $k, n \geq 1$ gegeben. Wieviele Lösungen in nichtnegativen ganzen Zahlen hat die Gleichung $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$?

Aufgabe 12

Gegeben sei ein Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, mit ganzzahligen Koeffizienten und $a_n = 1$. Zeigen Sie:

a) Eine Nullstelle von P ist entweder ganzzahlig oder irrational.
(Hinweis: Nehmen Sie an, es gäbe eine nichtganzzahlige rationale Nullstelle $\frac{a}{b}$. Setzen Sie diese in die Gleichung ein und leiten Sie einen Widerspruch her.)

b) Sei p eine Primzahl, dann ist $p^{\frac{1}{m}}$ für alle natürlichen Zahlen $m \geq 2$ irrational.