Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Gruppenübung 2

Aufgabe 5

a) Wieviele Anordnungen gibt es von dem Wort „MATHEMATIK"?

b) Wieviele Teiler hat die Zahl $2^7 \cdot 3^5 \cdot 151^3$?

c) Im klassischen Lotto-Spiel werden 6 aus 49 Zahlen in beliebiger Reihenfolge gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die richtigen Zahlen zu raten?

Aufgabe 6

Seien M und N Mengen. Der *Schnitt* $M \cap N$ ist definiert als $\{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$, die *Vereinigung* $M \cup N$ ist $\{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$. Die Vereinigung beliebig vieler Mengen M_i schreiben wir als $\bigcup\limits_i M_i$. Wir sagen die Mengen M und N sind *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$. Mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von M, d.h. die Menge aller Teilmengen von M.

a) Wieviele injektive Abbildungen gibt es zwischen zwei endlichen Mengen M und N mit m bzw n vielen Elementen? Geben Sie eine Formel an.

b) Seien M und N disjunkte endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f(X) = (X \cap M, X \cap N)$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{P}(M \cup N)$ und $\mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(N)$ ist.

c) Folgern Sie für alle $k \geq 1$: $\binom{m+n}{k} = \sum\limits_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \cdot \binom{n}{k-i}$.

Aufgabe 7

Ist k eine natürliche Zahl und n eine beliebige reelle Zahl, so kann man $\binom{n}{k}$ allgemeiner definieren als: $\binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$.

a) Berechnen Sie $\binom{0,5}{2}$. Für welche Zahlen n, k ist $\binom{n}{k} = 0$?

b) Zeigen Sie für alle $n, k \geq 1$: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

c) Zeigen Sie für alle $n \geq 0$ und $k \geq 1$: $\sum\limits_{m=0}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Aufgabe 8 (schriftlich)

Es sei eine Abbildung $f : M \to N$ gegeben und A und B seien Teilmengen von M. Zeigen Sie:

a) $M = \bigcup\limits_{n \in N} f^{-1}(n)$. Ist diese Vereinigung disjunkt, d.h. gilt für beliebige $n, m \in N$ mit $n \neq m$:
$f^{-1}(n) \cap f^{-1}(m) = \emptyset$?

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

c) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Gilt $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? (Beweis oder Gegenbeispiel angeben.)