Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

WS 2014/15

Gruppenübung 12

Aufgabe 46

Gegeben sei eine komplexe $n \times n$-Matrix A mit charakteristischem Polynom $\chi_A(t)$. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\chi_A(t)$ das charakteristische Polynom folgender Matrizen B.

i) $B = b \cdot A$, für ein $b \in \mathbb{R}$.

ii) $B = A^{-1}$, falls A invertierbar ist.

iii) $B = A^2$.

Aufgabe 47 (schriftlich)

Gegeben seien die Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 6 & -10 & 6 \\ 12 & -12 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -21 & 15 & -3 \\ -18 & 18 & -6 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i und die dazugehörigen Eigenvektoren v_i von A und diagonalisieren Sie A, sofern dies möglich ist. Machen Sie auch die Probe, d.h. verifizieren Sie $Av_i = \lambda_i v_i$.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_i und die dazugehörigen Eigenvektoren v_i von B und diagonalisieren Sie B, sofern dies möglich ist. Machen Sie auch die Probe, d.h. verifizieren Sie $Bv_i = \lambda_i v_i$.

Aufgabe 48

Sei π eine Permutation in Σ_3. Wir definieren eine zu π gehörige 3×3-Matrix $P_\pi = (p_{ij})$ durch:

$$p_{ij} = 1, \text{ falls } i = \pi(j) \text{ und } p_{ij} = 0 \text{ sonst,}$$

wie in Aufgabe 45 von Blatt 11 für $n = 3$.

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die komplexen Eigenwerte von P_π für alle $\pi \in \Sigma_3$. Entscheiden Sie jeweils, ob P_π diagonalisierbar ist.

Aufgabe 49

Die Fibonaccizahlen sind induktiv definiert als

$$F_0 := 0,\ F_1 := 1 \text{ und } F_{n+2} := F_n + F_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0,$$

vergleiche mit Aufgabe 25 von Blatt 7. Des Weiteren sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt:
$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

c) Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix T mit $D = T^{-1}AT$.

d) Berechnen Sie $A^m = (TDT^{-1})^m$, für alle $m \geq 1$.

e) Zeigen Sie nun mit Hilfe der vorigen Teilaufgaben: $F_n = \dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$ für alle $n \geq 1$.