Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Gruppenübung 11

Aufgabe 42

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

i) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} a+1 & a & 3 & 2-a \\ a+2 & 2 & 8 & a \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -a & -1 & a-5 & 1-a \end{pmatrix}$, für $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 43 (schriftlich)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A := (a_{ik})$ sei eine $n \times n$-Matrix mit $a_{ik} = 1$ für $i \neq k$ und $a_{ii} = x$ für alle $i = 1, ..., n$. Bestimmen Sie folgendes Polynom und dessen Nullstellen:

$$f(x) := det(A).$$

Aufgabe 44

Sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine $n \times n$-Matrix. Betrachten Sie folgende Aussage:

$$det(A) = det(A^t).$$

a) Zeigen Sie die Aussage für Matrizen in Zeilenstufenform.

b) Zeigen Sie die Aussage für Elementarmatrizen.

c) Zeigen Sie die Aussage für beliebige Matrizen.

Aufgabe 45

Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei π eine Permutation in Σ_n. Wir definieren eine zu π gehörige $n \times n$-Matrix $P_\pi = (p_{ij})$ durch:
$p_{ij} = 1$, falls $i = \pi(j)$ und $p_{ij} = 0$ sonst. e_i bezeichnen die Standardbasisvektoren im $\mathbb{R}^n$.

a) Berechnen Sie für $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ die dazugehörige Matrix P_σ.

b) Berechnen Sie $P_\pi e_i$, für ein beliebiges $\pi \in \Sigma_n$.

c) Zeigen Sie folgende Aussagen für beliebige Permutationen $\pi_1, \pi_2 \in \Sigma_n$:

   i) $P_{\pi_1} \cdot P_{\pi_2} = P_{\pi_1 \circ \pi_2}$

   ii) $det(P_{\pi_1}) = sgn(\pi_1)$

   iii) $P_{\pi_1}^{-1} = P_{\pi_1}^t = P_{(\pi_1)^{-1}}$