Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Gruppenübung 10

Aufgabe 38

Gegeben seien Mengen N und R mit $|N| = n$ und $|R| = r$ und wir betrachten die Menge X (bzw. $\widehat{X}$) aller Abbildungen (bzw. aller injektiven Abbildungen) von N nach R. Wir nennen $f_1 \in X$ und $f_2 \in X$ äquivalent, falls es eine Bijektion $g : N \to N$ gibt mit $f_1 = f_2 \circ g$ (wir schreiben dann $f_1 \sim_1 f_2$). Analog nennen wir $f_1 \in \widehat{X}$ und $f_2 \in \widehat{X}$ äquivalent, falls es eine Bijektion $g : N \to N$ gibt mit $f_1 = f_2 \circ g$ (wir schreiben dann $f_1 \sim_2 f_2$).

i) Zeigen Sie, dass $\sim_1$ eine Äquivalenzrelation auf X definiert und zeigen Sie, dass $\sim_2$ eine Äquivalenzrelation auf $\widehat{X}$ definiert. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen als $X/{\sim_1}$(bzw. $\widehat{X}/\sim_2$).

ii) Wie groß ist die Mächtigkeit von $X/{\sim_1}$ (bzw. $\widehat{X}/{\sim_2}$) für $|N| = 4$ und $|R| = 3$?

iii) Wie groß ist die Mächtigkeit von $X/{\sim_1}$(bzw. $\widehat{X}/{\sim_2}$) allgemein? (Hinweis: Vergleichen Sie die Aufgabe mit den kombinatorischen Grundaufgaben)

Aufgabe 39 (schriftlich)

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ den Rang folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & a-1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ a & -3 & 3a & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Gegeben seien die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^4$. Sei W der Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$, der von v_1 und v_2 erzeugt wird. Sei $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4/W$ die Projektion auf den Quotientenvektorraum $\mathbb{R}^4/W$. Mit e_i bezeichnen wir die Standardeinheitsvektoren und für einen Vektor v sei $[v]$ die Restklasse von v in $\mathbb{R}^4/W$. Sei $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$.

i) Zeigen Sie, dass $A := \{[e_1], [e_3]\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^4/W$ ist.

ii) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von π bezüglich der Basen B bzw. A von $\mathbb{R}^4$ bzw. $\mathbb{R}^4/W$.

Aufgabe 40

i) Es sei $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ und $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ mit $\phi(p) = p'$ die lineare Abbildung, die einem Polynom seine Ableitung nach x zuordnet. Bestimmen Sie Kern und Bild von ϕ.

ii) Seien V, W und X Vektorräume und $f : V \to W$ und $g : W \to X$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

a) $\text{Rang}(g \circ f) \leq \min(\text{Rang}(f), \text{Rang}(g))$

b) $\dim(\text{Ker}(g \circ f)) \geq \dim(\text{Ker}(f))$.

Aufgabe 41

Wir definieren $V := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R}\}$ und $U := \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f(-1) = 0 = f(1)\}$. Addition und Skalarmultiplikation ist hier wie in der Vorlesung punktweise definiert und V wird so zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

i) Zeigen Sie: U ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V.

ii) $V/U \cong \mathbb{R}^2$.
(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\phi : V \to \mathbb{R}^2$ mit $\phi(f) = (f(-1), f(1))$ und zeigen Sie $\ker(\phi) = U$.)