Steffen König
René Marczinzik
Inga Paul

Höhere Mathematik 1 für el, kyb, mecha, phys

WS 2014/15

Gruppenübung 1

Aufgabe 1 (schriftlich)

Zeigen Sie für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

c) $n^2 \leq 2^n + 1$

Aufgabe 2

Zeigen Sie für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\sum\limits_{k=1}^{n} k)^2$

b) $n! \leq n^{n-1}$

c) $2n + 1 \leq 2^n$ für $n \geq 3$

d) 6 teilt $n^3 + 5n$

e) 5 teilt $2^{n+1} + 3 \cdot 7^n$

Aufgabe 3

Die Fibonaccizahlen sind induktiv definiert als

$$F_0 := 0,\ F_1 := 1 \text{ und } F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$: a) $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ b) $\sum\limits_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$

Aufgabe 4

a) Überprüfen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(i) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f(x) = x^3$

(ii) $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f((x,y)) = x + y$

(iii) $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $f((x,y)) = 2^x(2y+1) - 1$

b) Die Menge der ganzen Zahlen $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}$.

(i) Gibt es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$? Falls ja, geben Sie eine solche Bijektion an.

(ii) Gibt es eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$? Falls ja, geben Sie eine solche Bijektion an.