1 Zahlen I: Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Grundeigenschaften von $\mathbb{N}$:

> Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, 1.
>
> Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat einen unmittelbaren Nachfolger, $n + 1$.
>
> Jedes $n \in \mathbb{N}$ wird von 1 aus erreicht, indem man endlich oft den Nachfolger bildet.

Wenn $M \subset \mathbb{N}$ eine nichtleere Menge ($M \neq \emptyset$) von natürlichen Zahlen ist, dann enthält M ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element.

1.1 Prinzip der vollständigen Induktion Sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge natürlicher Zahlen mit den folgenden beiden Eigenschaften:

> $1 \in M$ (1 liegt in der Menge),
>
> $\forall n : n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$ (für alle natürlichen Zahlen n gilt: wenn n in M liegt, dann muss auch $n + 1$ in M liegen).

Dann gilt: $M = \mathbb{N}$

1.2 Summenformeln

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ (d.h. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$)

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\displaystyle q \neq 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ("geometrische Summe")

1.3 Erste Grundaufgabe der Kombinatorik zu Permutationen Gegeben sind n verschiedene Gegenstände. Auf wieviele verschiedene Arten kann man diese Gegenstände anordnen?
Antwort: Es gibt $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ viele Möglichkeiten.

$X \times Y := \{(x_0, y_0) : x_0 \in X, y_0 \in Y\}$ ist das *kartesische Produkt* von X und Y, d.h. die Menge aller Paare (x_0, y_0) mit $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Teilmenge $f \subset X \times Y$, so dass gilt: $\forall x_0 \in X\ \exists! y_0 \in Y$ mit $(x_0, y_0) \in f$.

1.4 Definition Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

> f ist *injektiv* $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
>
> f ist *surjektiv* $:\Leftrightarrow \forall y_0 \in Y\ \exists x_0 \in X$ so dass $f(x_0) = y_0$.

f ist *bijektiv* $:\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv.

1.5 Proposition Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:
f ist bijektiv $\Leftrightarrow \exists g : Y \to X$ eine Abbildung, so dass $g \circ f : x_0 \mapsto g(f(x_0))$ die Identität $x_0 \mapsto x_0$ auf X ist und $f \circ g : y_0 \mapsto f(g(y_0))$ die Identität $y_0 \mapsto y_0$ auf Y.
Bezeichnung: $g \circ f$ ist die Komposition (Hintereinanderausführung) von f und g.
$|X| = |Y| :\Leftrightarrow \exists f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$.

1.6 Zweite Grundaufgabe zu Permutationen Gegeben sind n Objekte, die k verschiedene Farben haben. Auf wieviele verschiedene Arten kann man diese Objekte anordnen, wenn man gleichfarbige Objekte nicht voneinander unterscheiden will?
$f_j := |\{x \text{ Objekt mit Farbe } j\}|$, also $n = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$.
Variante: Gegeben sind k verschiedene Buchstaben. Wieviele Wörter der Länge n kann man daraus bilden, wenn man den $j-$ten Buchstaben f_j mal verwenden darf?
Antwort $\frac{n!}{f_1!f_2!\ldots f_k!} = \frac{(f_1+f_2+\ldots+f_k)!}{f_1!f_2!\ldots f_k!}$.

1.7 Dritte Grundaufgabe zu Kombinationen ohne Wiederholung Gegeben seien n verschiedene Objekte und $k \leqslant n$. Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Objekte auszuwählen, unter Berücksichtigung der Anordnung = Reihenfolge (Kombinationen ohne Wiederholung mit Berücksichtigung der Anordnung) bzw. ohne Berücksichtigung der Anordnung?
Antwort:

$\frac{n!}{(n-k)!}$ mit Berücksichtigung der Anordnung

$\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ohne Berücksichtigung der Anordnung

$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ heißt *Binomialkoeffizient.*

Es gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

1.8 Binomischer Lehrsatz Seien a und b reelle (oder komplexe) Zahlen und $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt: $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

1.9 Korollar Sei M eine Menge mit $|M| = n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) M hat genau 2^n viele verschiedene Teilmengen.

(b) M hat genau 2^{n-1} viele verschiedene Teilmengen mit gerader Elementezahl und ebenso viele verschiedene Teilmengen mit ungerader Elementezahl.

1.10 Vierte Grundaufgabe zu Kombinationen mit Wiederholung Gegeben seien n verschiedene Objekte und $k \leqslant n$. Wieviele Möglichkeiten gibt es, k viele Objekte auszuwählen, wobei Wiederholungen erlaubt sind (mit bzw. ohne Berücksichtigung der Anordnung)?

Antwort:

n^k mit Berücksichtigung der Anordnung

$\binom{n+k-1}{k}$ ohne Berücksichtigung der Anordnung

2 Zahlen II: Rationale, reelle und komplexe Zahlen

$\mathbb{Z} := \{\text{ganze Zahlen}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

2.1 Definition Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen

$$+ : R \times R \to R \quad \text{und} \quad \cdot : R \times R \to R$$

heißt *Ring*, wenn gilt:

(a) $\forall\ a, b \in R : a + b = b + a$ (Addition ist kommutativ)

(b) $\forall\ a, b, c \in R : (a + b) + c = a + (b + c)$ (Addition ist assoziativ)

(c) $\exists\ 0 \in R : \forall\ a \in R : a + 0 = a = 0 + a$ (Existenz eines neutralen Elements bzgl. $+$)

(d) $\forall\ a \in R : \exists - a \in R : a + (-a) = 0 = (-a) + a$ (Existenz von inversen Elementen bzgl. $+$)

(e) $\forall\ a, b, c \in R : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Multiplikation ist assoziativ)

(f) $\exists\ 1 \neq 0 \in R : \forall a \in R : a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$ (Existenz eines neutralen Elements bzgl. $\cdot$)

(g) $\forall\ a, b, c \in R : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetze)

Falls zusätzlich $\forall\ a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$ gilt, dann heißt R (genauer $(R, +, \cdot)$)
ein *kommutativer Ring*.

2.2 Definition Ein kommutativer Ring k heißt *Körper*, wenn gilt:
$\forall x \in R, x \neq 0\ \exists\ x^{-1} \in R : x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1}x$.

2.3 Definition Sei k ein angeordneter Körper und $X \subset k$ eine nichtleere Teilmenge von k. Ein Element $t \in k$ heißt *obere Schranke* für X, wenn $\forall x_0 \in X : x_0 \leqslant t$ gilt. X heißt nach oben *beschränkt*, wenn es eine obere Schranke für X gibt. Ein Element $s \in k$ heißt *kleinste obere* Schranke für X, wenn s eine obere Schranke ist und für jede obere Schranke t gilt: $s \leqslant t$. Dann wird s auch *Supremum* von X genannt; Bezeichnung $s = supX$. Der Körper k heißt *vollständig*, wenn jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

$\mathbb{R}$ ist der einzige angeordnete vollständige Körper (Was "vollständig"für $\mathbb{C}$ bedeutet, wird in HM II erklärt). $\mathbb{C}$ ist auch ein vollständiger Körper, aber nicht angeordnet.

$\mathbb{C} := \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ mit
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2,\ y_1x_2 + x_1y_2)$

Für $(0, 1)$ schreiben wir i, dann gilt: $i^2 = -1$.
Wenn wir (x, y) als $x + iy$ schreiben,

ist die Addition $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

ist die Multiplikation $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$.

Des Weiteren zeigt bzw. definiert man für $z = a + bi$ in $\mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

- Falls $z \neq 0$, dann $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.
- $\bar{z} = a - bi$ heißt *komplex konjugiert* zu $z = a + bi$.
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt der *Betrag* von z.
- Dreiecksungleichung: $\forall z, w \in \mathbb{C} : |z + w| \leqslant |z| + |w|$.
- $Re(z) := a$ heißt der *Realteil* von z. $Im(z) := b$ heißt der *Imaginärteil* von z. $Re(z)$ und $Im(z)$ sind die kartesischen Koordinaten von z.
- Es existiert $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varphi \leqslant 2\pi$ so dass $z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$.
- $arg(z) := \varphi$ heißt das *Argument* von z. Das Paar $(|z|, \varphi)$ nennt man auch die *Polarkoordinaten* von z.
- Für $z = |z|\ (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ ist $\overline{z} = |z|\ (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = |z|\ (\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$, also $arg(\overline{z}) = 2\pi - \varphi$.
- Für $w = |w|\ (\cos\psi + i \cdot \sin\psi)$ ist $z \cdot w = |z| \cdot |w|\ (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi))$.
- Für $z \neq 0 : \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - i \cdot \sin\varphi)$.
- Für $z \neq 0 : w_k := \sqrt[n]{|z|}\ (\cos(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}))$ für $k = 0, \ldots, n-1$ sind n verschiedene $n - te$ Wurzeln aus z, und dies sind auch alle $n - ten$ Wurzeln aus z.

2.4 Theorem (Fundamentalsatz der Algebra):
Seien $n \geqslant 1$ und $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$, ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat p eine Nullstelle, d.h. $\exists\ z \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = 0$.

2.5 Beispiel Es existiert ein Körper $\mathbb{F}_2$ mit nur zwei Elementen $0, 1$. Multiplikation bzw. Addition sind wie folgt gegeben:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

3 Vektorräume

3.1 Definition Sei k ein Körper. Ein *k-Vektorraum* (oder: ein Vektorraum über k) ist eine Menge V mit zwei Operationen $+ : V \times V \to V$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$ und $\cdot : k \times V \to V$, $(\lambda, v_1) \mapsto \lambda v_1$ mit den folgenden Eigenschaften:

+ ist kommutativ: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1\ \forall v_1, v_2 \in V$.

+ ist assoziativ: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)\ \forall v_1, v_2, v_3 \in V$.

+ erlaubt ein neutrales Element $0 \in V : v_1 + 0 = v_1 = 0 + v_1 \ \forall v_1 \in V$.

+ erlaubt inverse Elemente: $\forall v_1 \ \in V \ \exists v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1 = 0$,

und

$\forall v_1, v_2 \ \in V \ \forall \lambda, \mu \in k :$

$$(\lambda + \mu) \cdot v_1 = \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_1$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot v_1 = \lambda \cdot (\mu \cdot v_1)$$

$$1_k \cdot v_1 = v_1$$

Die Elemente in V nennen wir *Vektoren*, die in k *Skalare*.

3.2 Definition Sei V ein k-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt *Untervektorraum* (oder Unterraum) von V, wenn gilt:

$(UV1)$ $U \neq \varnothing$

$(UV2)$ $\forall u_1, u_2 \in U : u_1 + u_2 \in U$ (abgeschlossen unter Addition)

$(UV3)$ $\forall u_1 \in U, \lambda \in k : \lambda \ u_1 \in U$ (abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren)

Die Lösungsmenge eines Systems von homogenen linearen Gleichungen, in n Variablen (kurz: homogenes LGS) ist ein Untervektorraum von k^n.

U, U' Unterräume von $V \Rightarrow U \cap U'$ Unterraum von V.

3.3 Definition Sei V ein k-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ein Vektor $x \in V$ ist eine *Linearkombination* der $v_1, \ldots, v_n :\Leftrightarrow \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k : x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.
Das *Erzeugnis* der $v_1, \ldots, v_n$ ist die Menge

$$\text{Sp } (v_1, \ldots, v_n) := \{x \in V : x \text{ Linearkombination der } v_1, \ldots, v_n\}$$

(die von $v_1 \ldots, v_n$ aufgespannte Menge).
Falls Sp $(v_1, \ldots, v_n) = V$, nennen wir $v_1, \ldots, v_n$ ein *Erzeugendensystem* von V.

Sp $(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein Untervektorraum von V.

3.4 Definition Sei V ein k-Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$.

$v_1, \ldots, v_n$ sind *linear abhängig*: $\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$, mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, so dass $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$.

$v_1, \ldots, v_n$ sind *linear unabhängig*: $\Leftrightarrow \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k : \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Ein Erzeugendensystem von V, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht, heißt *Basis* von V.

Wenn unendlich viele v_i ($i \in I$ Indexmenge) gegeben sind, nennt man sie linear abhängig, wenn man endlich viele $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ findet, die linear abhängig sind.

3.5 Theorem Jeder Vektorraum hat eine Basis. Wenn $v_i, i \in I$, und $u_j, j \in J$, Basen eines Vektorraums V sind, dann gibt es eine Bijektion zwischen I und J.
Wenn V eine Basis mit $n \in \mathbb{N}$ vielen Elementen besitzt, dann hat jede Basis von V genau n viele Elemente. n heißt dann die *Dimension* von V.
Bezeichnung: $dimV$

$dimV = \infty$, falls keine endliche Basis existiert.

Eine Basis ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem: Sp $(b_i, i \in I) = V$, aber
Sp $(b_i, i \in I - \{j\}) \underset{\neq}{\subset} V$.

Eine Basis ist eine unverlängerbare linear unabhängige Menge von Vektoren, d.h. b_i sind linear unabhängig, aber $b_i, i \in I$ zusammen mit irgendeinem $v_0 \in V$ sind linear abhängig.

4 Gaußsches Eliminationsverfahren

(Gauß-Algorithmus)

4.1 Definition Gegeben sei ein LGS

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l$$

(alle $a_{ij} \in k, b_i \in k, l$ Zeilen, n Unbekannte, n Spalten mit a_{ij}, eine Spalte mit b_i.)

Das Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \ldots & a_{ln} \end{pmatrix}$$

heißt *Koeffizientenmatrix* des LGS

Das Zahlenschema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{l1} & \ldots & a_{ln} & b_l \end{array}\right)$$

heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix* des LGS

Allgemein heißt ein rechteckiges Zahlenschema

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & & \\ c_{l1} & \ldots & c_{lk} \end{pmatrix}$$

(mit $c_{ij} \in k$ Körper) eine $l \times k$-*Matrix.*

C hat *Zeilenstufenform*, wenn es die folgende Form hat:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{c_{1k_1} * \cdots *} & * & * & * \\ \cline{4-4} 0 & \dots & \dots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{c_{2k_2} * \cdots *} & * & * \\ \cline{5-5} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{c_{3k_3} * \cdots *} & * \\ \cline{6-6} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{c_{ik_i} * \cdots *} \\ \cline{7-7} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

wobei die Einträge unterhalb der Stufenlinie alle 0 sind, oberhalb der Stufenlinie irgendwelche Skalare stehen, die $c_{1_{k_1}}, \dots, c_{j_{k_j}}$ alle ungleich 0 sind und unterhalb von jedem $c_{i_{k_i}}$ alle Einträge 0 sind.

4.2 Grundeigenschaft des Gauß-Algorithmus: Jede Matrix (mit Einträgen in einem Körper) kann man in Zeilenstufenform bringen, indem man endlich viele elementare Zeilenumformungen durchführt:

> (EZ1) Für $\lambda \in k$ wird die λ-fache Zeile mit Nr. a zur Zeile mit Nr. b addiert. (Im Fall $a = b$ darf man die Zeile mit Nr. a mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren.)
>
> (EZ2) Die Zeile mit Nr. a wird mit der Zeile mit Nr. b vertauscht.

4.3 Grundaufgabe: Im Vektorraum $V = k^l$ sind Vektoren $v_1, \dots, v_n$ gegeben. Zu entscheiden ist, ob $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.

Lösung: Homogenes LGS mit Unbekannten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ aufstellen und lösen. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ liefern die Spalten der Koeffizientenmatrix.

Falls $n > l = dimV$, so müssen $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sein.

4.4 Grundaufgabe: Im Vektorraum $V = k^l$ sind Vektoren $v_1, \dots, v_n$ gegeben, die $U = \mathrm{Sp}(v_1, \dots, v_n)$ erzeugen. Zu bestimmen ist eine Basis von U.

Lösung: Matrix, deren Zeilen den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ entsprechen, in Zeilenstufenform bringen und dann die Nullzeilen weglassen.

5 Matrizen

$Mat(l \times n, k)$ ist die Menge aller Matrizen mit l Zeilen und n Spalten und Einträgen in k.
Seien $A, B \in Mat(l \times n, k)$, zwei Matrizen gleicher Größer, mit Einträgen in demselben Körper k, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$.

Die Summe $C = A + B$, $C = (c_{ij})$ ist definiert durch $c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$.
d.h.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} + b_{l1} & \dots & a_{ln} + b_{ln} \end{pmatrix}$$

Dann ist auch $C \in Mat(l \times n, k)$.

Addition von Matrizen ist assoziativ und kommutativ.

Die Matrix $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ist neutrales Element in $Mat(l \times n, k)$ bezüglich Addition.

$A \in Mat(l \times n, k), B \in Mat(n \times p, k)$

Dann ist $C = A \cdot B$ definiert durch $c_{ij} := \sum\limits_{h=1}^{n} a_{ih}\, b_{hj}$. $C \in Mat(l \times p, k)$

Multiplikation ist assoziativ: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, und es gilt das Distributivgesetz $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ sowie $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Multiplikation von Matrizen ist *nicht* kommutativ.

Mit E_l bezeichnen wir die $l-$te Einheitsmatrix,

$$E_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in Mat(l \times l, k) \text{ (quadratische Matrix)}$$

Für $A \in Mat(l \times n, k)$ gilt $E_l \cdot A = A = A \cdot E_n$.

5.1 Proposition Die Menge $Mat(n \times n, k)$ der quadratischen Matrizen mit Einträgen in k bildet einen Ring mit Einselement E_n. Für $n \geqslant 2$ ist dieser Ring nicht kommutativ.

$Mat(l \times n, k)$ ist für beliebiges l, n ein k-Vektorraum mit $\lambda\ (a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$.

Eine Basis besteht aus den Matrizen:

$$E_i^j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ j\text{-te Spalte} \end{array}$$

Die folgenden Matrizen $S_i(\lambda), Q_i^j(\lambda)$ und P_i^j nennen wir *Elementarmatrizen*.

$$\lambda \in K, \lambda \neq 0, S_i(\lambda) := \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & & & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccc} & & & & i\text{-te Spalte} & & & & \end{array} & \end{array}$$

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \lambda & & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccccccc} & & & & j\text{-te Spalte} & & & \end{array} & \end{array}$$

$$P_i^j = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & & & \\ & & & \vdots & 1 & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & 1 & \vdots & & & \\ & & & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} i\text{-te Spalte} & \qquad\qquad & j\text{-te Spalte} \end{array} & \end{array}$$

$S_i(\lambda) \cdot A$ bedeutet: die Einträge in der $i-$ten Zeile von A werden mit λ multipliziert.

$A \cdot S_i(\lambda)$ bedeutet: $i-$te Spalte von A wird mit λ multipliziert.

$Q_i^j(\lambda) \cdot A$ bedeutet: $\lambda\cdot$ Zeile j wird zu Zeile i addiert.

Multiplikation von links mit P_i^j vertauscht die Zeilen i und j.

Multiplikation von rechts mit P_i^j vertauscht die Spalten i und j.

Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen: Zeilenoperation.

Rechtsmultiplikation mit Elementarmatrizen: Spaltenoperation.

5.2 Korollar Sei $A \in Mat(l \times n, k)$ eine Matrix. Dann existieren Elementarmatrizen $B_1, \ldots, B_p$ (endlich viele), so dass $B_1 \cdot \ldots \cdot B_p \cdot A$ eine Matrix in Zeilenstufenform ist.

5.3 Definition Sei $A \in Mat(l \times n, k)$ eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in k$. Die *transponierte Matrix* zu A hat die Einträge $b_{ij} := a_{ji}$. Bezeichnung: A^T oder A^t.

5.4 Lemma $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
$(A + B)^T = A^T + B^T$, und $(A^T)^T = A$.
$S_i(\lambda)^T = S_i(\lambda)$
$Q_i^j(\lambda)^T = Q_j^i(\lambda)$
$(P_i^j)^T = P_i^j$

6 Lineare Abbildungen

6.1 Definition Seien V und W Vektorräume über einem Körper k. Eine Abbildung $\alpha : V \to W$ heißt *lineare Abbildung* (oder: *$k-$linear* oder *Vektorraum–Homomorphismus*).
$:\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V \ \forall \lambda \in k : \alpha(v_1 + v_2) = \alpha(v_1) + \alpha(v_2)$ und $\alpha\ (\lambda v_1) = \lambda\ \alpha(v_1)$.

6.2 Theorem V und W seien $k-$Vektorräume, $\{b_i | i \in I\}$ sei eine Basis von V.

(a) Eine lineare Abbildung $\alpha : V \to W$ ist festgelegt durch die Werte $\alpha(b_i)$.

(b) Seien $\{c_i | i \in I\}$ irgendwelche Vektoren in W. Dann gibt es eine (und wegen (a) genau eine) lineare Abbildung $\beta : V \to W$ mit $\beta(b_i) = c_i \forall i \in I$.

6.3 Theorem V und W seien endlich-dimensionale $k-$Vektorräume, $dimV = n, dimW = l, \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V, \{c_1, \ldots, c_l\}$ eine Basis von W und $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau eine Matrix $A \in Mat(l \times n, k)$, so dass $\alpha(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ ist für $\vec{x} \in V$. Die Spalten von A sind $\alpha(b_1), \ldots, \alpha(b_n)$.

6.4 Definition Die Matrix A heißt die *darstellende Matrix* zur linearen Abbildung α bezüglich der Basen $b_1, \ldots, b_n$ und $c_1, \ldots, c_l$.

Bei linearen Abbildungen = $(VR-)$ Homomorphismen vereinbaren wir spezielle Bezeichnungen:

injektiv $\longleftrightarrow$ Monomorphismus

surjektiv $\longleftrightarrow$ Epimorphismus

bijektiv $\longleftrightarrow$ Isomorphismus

Wenn es einen Isomorphismus $\alpha : V \to W$ gibt, sagen wir, dass V und W *isomorph* sind.

6.5 Proposition Ein Homomorphismus $\alpha : V \to W$ ist ein Isomorphismus genau dann, wenn α eine Basis von V auf eine Basis von W abbildet. In diesem Fall gilt $dimV = dimW$ und α bildet dann jede Basis von V auf eine Basis von W ab.

Wichtiges Beispiel: Sei V ein $k-$Vektorraum mit Dimension $n \in \mathbb{N}$. Dann hat V eine Basis $b_1, \ldots, b_n$. Sei $W = k^n$ mit Basis $e_1, \ldots, e_n$, wobei

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

Nach 6.2 (b) gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\alpha : V \to k^n$ mit $\alpha(b_i) = e_i$.
Nach 6.5 ist das ein Isomorphismus. Die inverse Abbildung ist $\alpha^{-1} : k^n \to V, e_i \mapsto b_i$.

α bildet v_1 auf seinen Koordinatenvektor in k^n ab.
α hängt von der Wahl der Basis $b_1, \ldots, b_n$ ab.

6.6 Theorem eine Matrix $A \in Mat(n \times n, k)$ ist invertierbar genau dann, wenn sie ein Produkt von Elementarmatrizen ist.

Konstruktion von A^{-1}

$$\begin{array}{cc} A & E_n \\ B_1 A & B_1 E_n = B_1 \\ B_2 B_1 A & B_2 B_1 E_n = B_2 B_1 \\ \vdots & \vdots \\ B_s \ldots B_1 A & B_S \ldots B_1 E_n = B_s \ldots B_1 \\ = E_n & = A^{-1} \end{array}$$

7 Kern, Bild und Rang

7.1 Definition Sei $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Der *Kern* von α ist $Kern(\alpha) := \{v_0 \in V | \alpha(v_0) = 0_W\} = \alpha^{-1}(0_W)$.

Das *Bild* von α ist $Bild(\alpha) := \{w_0 \in W | \exists v_0 \in V : \alpha(v_0) = w_0\} = \alpha(V)$.

7.2 Proposition

(a) α ist injektiv $\Leftrightarrow Kern(\alpha) = 0_V$.

(b) α ist surjektiv $\Leftrightarrow Bild(\alpha) = W$.

7.3 Dimensionsformel: Sei $dimV < \infty, \alpha : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$dim\ V = dim\ Kern(\alpha) + dim\ Bild(\alpha).$$

Also: α injektiv $\Leftrightarrow dim\ V = dim\ Bild(\alpha)$.

7.4 Definition Sei X eine Menge und $R \subset X \times X$ eine Teilmenge von $X \times X$. R heißt *Äquivalenzrelation*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$\forall x_0 \in X : (x_0, x_0) \in R$ (R ist *reflexiv*).

$\forall x_0, y_0 \in X : (x_0, y_0) \in R \Rightarrow (y_0, x_0) \in R$ (R ist *symmetrisch*).

$\forall x_0, y_0, z_0 \in X : (x_0, y_0) \in R$ und $(y_0, z_0) \in R \Rightarrow (x_0, z_0) \in R$ (R ist *transitiv*).

Wenn $(x_0, y_0) \in R$, dann sagt man x_0 und y_0 sind *äquivalent* und man schreibt: $x_0 \sim y_0$ (oder $x_0 \sim_R y_0$).

7.5 Definition Sei $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation, $x_0 \in X$. Die *Äquivalenzklasse* von x_0 ist die Menge $\{y_0 \in x : x_0 \sim y_0\}$.

7.6 Definition Sei $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit X/R (oder $X/\sim$) bezeichnet. Elemente von Äquivalenzklassen sind *Repräsentanten* der Äquivalenzklassen.

7.7 Quotientenvektorraum: Sei V ein $k-$Vektorraum und U ein Unterraum.
$x \sim_R y := x - y \in U$ definiert eine Äquivalenzrelation auf V. Die Menge der Äquivalenzklassen, $V/\sim$, wird mit V/U bezeichnet. V/U ist selbst ein $k-$Vektorraum und heißt der *Quotienten(vektor)raum* "*V modulo U*".

$dim\ V = dim\ U + dim\ V/U$ (falls $dim\ V < \infty$).

7.8 Proposition Sei $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist $Bild(\alpha) \simeq V/Kern(\alpha)$.

7.9 Definition Sei $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Dimension von $Bild(\alpha)$ wird mit *Rang* von α, kurz $Rang(\alpha)$, bezeichnet.
Es gilt also: $Rang(\alpha) = dim\ V - dim\ Kern(\alpha)$.
Wenn $\alpha : V \to W$ die Form $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ für eine Matrix A hat, nennt man $Rang(\alpha)$ auch den *Rang* der Matrix A und schreibt $Rang(A)$.

$Rang(A) = Rang(A^T)$.
Es gilt: $Rang(A) \leqslant l$ und $Rang(A) \leqslant n$ für $A \in Mat(l \times n, k)$.

7.10 Definition $A \in Mat(n \times n, k)$ heißt *regulär*, wenn $Rang(A) = n$, und *singulär*, wenn $Rang(A) < n$.

7.11 Theorem Sei $\alpha : V \to W$, mit $dim\ V = dim\ W = n$, eine lineare Abbildung, die bezüglich gegebener Basen von V und W die Form $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ hat, für eine quadratische Matrix $A \in Mat(n \times n, k)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) α ist ein Isomorphismus, d.h. bijektiv.

(b) α ist ein Monomorphismus, d.h. injektiv, d.h. $Kern(\alpha) = \{0\}$.

(c) α ist ein Epimorphismus, d.h. surjektiv, d.h. $Bild(\alpha) = W$.

(d) $Rang(\alpha) = n$.

(e) A ist invertierbar.

(f) A ist regulär, d.h. A hat Zeilenrang n.

(g) A^T ist regulär, d.h. A hat Spaltenrang n.

(h) In der Zeilenstufenform von A sind alle Diagonalelemente $\neq 0$.

(i) In der Spaltenstufenform von A sind alle Diagonalelemente $\neq 0$.

(j) Das LGS $A\vec{x} = 0$ hat nur den Nullvektor als Lösung.

(k) Für jede Wahl von $\vec{b}$ hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.

8 Determinanten

8.1 Definition Sei $n \in \mathbb{N}, \sigma \in \Sigma_n = \{\text{Permutationen von } n \text{ Elementen}\}$.
Ein *Fehlstand* von σ ist ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Das *Vorzeichen* von σ, Bezeichnung $sgn(\sigma)$, ist als $+1$ definiert, wenn σ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat und als -1, wenn die Anzahl der Fehlstände ungerade ist.

8.2 Definition Sei $A = (a_{ij}) \in Mat(n \times n, k)$. Die *Determinante* von A ist definiert als

$$det(A) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \text{ (\textit{Leibniz- Formel})}$$

Regel von Sarrus :
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{cccccc} & a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{13}a_{21}a_{32} \\ - & a_{11}a_{23}a_{32} & - & a_{12}a_{21}a_{33} & - & a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

8.3 Lemma Sei $A \in Mat(n \times n, k)$ in ZSF. Dann gilt: $detA = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$. A ist also genau dann invertierbar, wenn $detA \neq 0$.

8.4 Multiplikationsregel für Determinanten: Seien $A, B, \in Mat(n \times n, k)$.
Dann gilt: $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$.
Also auch: $det(A \cdot B) = det(B \cdot A)$.
Im Allgemeinen ist $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$.

8.5 Theorem Sei $A \in Mat(n \times n, k)$. Dann gilt: A ist invertierbar $\Leftrightarrow detA \neq 0$. Dann ist $det(A^{-1}) = (detA)^{-1}$.
Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen können $detA$ ändern, aber nicht, dass $detA \neq 0$ ist (bzw. $= 0$).

8.6 Entwicklungssatz von Laplace: Sei $A \in Mat(n \times n, k)$. Für $1 \leqslant i, j \leqslant n$ sei $\widetilde{A_{ij}}$ die Matrix in $Mat(n - 1 \times n - 1, k)$, die aus A durch Streichen der $i-$ten Zeile und der $j-$ten Spalte entsteht. Dann gilt: $detA = \sum_{l=1}^{n} a_{il} \cdot (-1)^{i+l} det\widetilde{A_{il}}$ (Entwicklung nach der $i-$ten Zeile) und $detA = \sum_{l=1}^{n} a_{lj} \cdot (-1)^{l+j} det\widetilde{A_{lj}}$ (Entwicklung nach der $j-$ten Spalte).

9 Eigenvektoren, Eigenwerte und Diagonalmatrizen

9.1 Definition Sei V ein $k-$Vektorraum, $\alpha : V \to V$ ein Endomorphismus (lineare Selbstabbildung). Ein Skalar $\lambda \in k$ heißt *Eigenwert* von $\alpha :\Leftrightarrow \exists v_0 \in V, v_0 \neq 0$ mit $\alpha(v_0) = \lambda v_0$. Ein solches v_0 heißt dann *Eigenvektor* von α zum Eigenwert λ.

9.2 Definition Sei $\alpha : V \to V$ linear und $\lambda \in k$. Der *Eigenraum* zu α bezüglich λ ist definiert als
$Eig(\alpha, \lambda) := \{v_0 \in V : v_0 \text{ Eigenvektor von } \alpha \text{ zu } \lambda\} \cup \{0\} = \{v_1 \in V : \alpha(v_1) = \lambda v_1\}$.

Das bedeutet: $Eig(\alpha, \lambda) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert $\Leftrightarrow$ es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert λ.
$Eig(\alpha, \lambda)$ ist (für jedes λ) ein Untervektorraum von V.
Die Summe von zwei Eigenvektoren zu zwei verschiedenen Eigenwerten ist im Allgemeinen kein Eigenvektor (zu irgendeinem Eigenwert)

9.3 Proposition Sei $\alpha : k^n \to k^n$ linear. Es gibt genau dann eine Basis von k^n bezüglich derer α durch eine Diagonalmatrix beschrieben (diagonalisierbar) ist, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Beobachtung: $Eig(\alpha, 0) = Kern(\alpha)$.
Allgemein: λ_1 ist $EW \Leftrightarrow det(A - \lambda_1 E_n) = 0$
Dann ist: $v_1 EV$ zu $\lambda_1 \Leftrightarrow v_1 (\neq 0) \in Kern(\alpha - \lambda_1 id)$ (Lösungsmenge eines homogenen LGS).
Betrachte λ als Variable, d.h. betrachte $det(A - tE_n)$ - das ist ein Polynom, dessen Nullstellen gerade die Eigenwerte sind.

9.4 Proposition Sei $\alpha : V \to V$ linear, $dim V = n$, und $b_1, \ldots, b_{l_1}$ linear unabhängige EV zum $EW \lambda_1, c_1, \ldots, c_{l_2}$ linear unabhängige EV zum $EW \lambda_2 \neq \lambda_1, d_1, \ldots, d_{l_3}$ linear unabhängige EV zum $EW \lambda_3 \neq \lambda_1, \lambda_2$, usw. Dann sind die Vektoren $b_i, c_j, d_k, \ldots$ insgesamt linear unabhängig.

9.5 Definition Sei $A \in Mat(n \times n, k)$ und t eine Variable. Das Polynom $\chi_A(t) := det(A - tE_n)$ heißt *charakteristisches Polynom* von A.

<u>Verfahren zur Diagonalisierung:</u> Gegeben eine Matrix $A \in Mat(n \times n, k)$.

<u>1. Schritt:</u> Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ durch Berechnung der Determinante $det(A - tE_n)$.

<u>2. Schritt:</u> Bestimme die Nullstellen von $\chi_A(t)$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ die verschiedenen Nullstellen von $\chi_A(t)$. Das sind genau die Eigenwerte von A. Falls es keine gibt: nicht diagonalisierbar.

<u>3. Schritt:</u> Bestimme $Eig(A, \lambda_i)$ für jeden Eigenwert λ_i, als Lösungsmenge des homogenen LGS $(A - \lambda_i E_n)\vec{x} = 0$. Bestimme eine Basis.

<u>4. Schritt:</u> Falls alle Basen aller $Eig(A, \lambda_i)$ zusammen n Vektoren enthalten: Das ist eine Basis von V, bezüglich derer die zu A gehörende lineare Abbildung diagonalisierbar ist. Falls es weniger als n Vektoren sind: A ist nicht diagonalisierbar.

10 Basiswechsel und Normalformen

10.1 Regel zum Basiswechsel: Gegeben $\varphi : V \to W$ mit darstellender Matrix A bezüglich B_V und C_W. Basiswechsel von B_V zu $\widetilde{B_V}$ durch T und von C_W zu $\widetilde{C_W}$ durch S. Dann ist $\widetilde{A} = SAT^{-1}$ die darstellende Matrix von φ bezüglich der neuen Basen $\widetilde{B_V}$ und $\widetilde{C_W}$.

10.2 Definition Seien $A, B \in Mat(l \times n, k)$. A und B heißen *äquivalent*, wenn es invertierbare Matrizen $S \in Mat(l \times l, k)$ und $T \in Mat(n \times n, k)$ gibt mit $B = SAT^{-1}$.

10.3 Theorem Seien $A, B \in Mat(l \times n, k)$. Dann sind äquivalent:

(a) A und B sind äquivalent, d.h. $\exists S \in Mat(l \times l, k), T \in Mat(n \times n, k)$ invertierbar mit $B = SAT^{-1}$.

(b) $\exists \varphi : V \to W, \varphi$ linear, $dimV = n, dimW = l$, und es gibt Basen B_V und $\widetilde{B_V}$ von V und C_W und $\widetilde{C_W}$ von W, so dass A die darstellende Matrix von φ bezüglich B_V und C_W ist, und B die darstellende Matrix von φ bezüglich $\widetilde{B_V}$ und $\widetilde{C_W}$.

(c) $Rang(A) = Rang(B) = r \in \{0, \ldots, min\{l, n\}\}$.

(d) $\exists r \in \{0, \ldots, min\{l, n\}\}$, so dass A und B beide äquivalent zur $l \times n-$ Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \text{mit } r \text{ Einsen sind.}$$

10.4 Definition Zwei quadratische Matrizen $A, B \in Mat(n \times n, k)$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in Mat(n \times n, k)$ gibt mit $B = TAT^{-1}$.

10.5 Theorem Sei $A \in Mat(n \times n, k)$. Dann sind äquivalent:

(a) A ist *diagonalisierbar*, d.h. ähnlich zu einer Diagonalmatrix: $\exists T$ mit $TAT^{-1} =$ Diagonalmatrix.

(b) Das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ ist ein Produkt von Linearfaktoren, $\chi_A(t) = \pm(t - \lambda_1)^{a_1} \, (t - \lambda_2)^{a_2} \ldots (t - \lambda_l)^{a_l}$, und die Vielfachheiten der Linearfaktoren stimmen mit den Dimensionen der Eigenräume überein: $dimEig(A, \lambda_1) = a_1, \ldots, dimEig(A, \lambda_l) = a_l$.

Beispiel: $\lambda \in \mathbb{C}, J_n(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix}$, so eine Matrix heißt *Jordanblock* der Größe $n \times n$, zum Eigenwert λ.

10.6 Theorem Sei A eine Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist A ähnlich zu einer Matrix der folgenden Form, wobei in den Kästchen Jordanblöcke stehen.

Jordan-Normalform:

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \boxed{} & & & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \boxed{} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{} \end{pmatrix}$$

11 Skalarprodukte

11.1 Definition Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Eine Abbildung $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Skalarprodukt*, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(B1) $\forall v_1, v_2 \in V \ \forall w \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : < v_1 + v_2, w >=< v_1, w > + < v_2, w >$
$< \lambda v_1, w >= \lambda < v_1, w >$ (linear in der ersten Variablen).

(B2) $\forall v_0 \in V \ \forall w_1, w_2 \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : < v_0, w_1 + w_2 >=< v_0, w_1 > + < v_0, w_2 >$
$< v_0, \lambda w_1 >= \lambda < v_0, w_1 >$ (linear in der zweiten Variablen).

(S) $\forall v_1, v_2 \in V : < v_1, v_2 >=< v_2, v_1 >$.

(P) $\forall v_1 \in V, v_1 \neq 0 : < v_1, v_1 > > 0$.

(B1) und (B2) stehen für "bilinear ", (S) für "symmetrisch ", (P) für "positiv definit".
(B2) folgt aus (B1) und (S).

11.2 Definition Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $<,>$ ein Skalarprodukt. V mit $<,>$ heißt dann ein *euklidischer Vektorraum*.
Für $v_1 \in V$ sei $\| v_1 \| := \sqrt{< v_1, v_1 >}$. $\| v_1 \|$ heißt die *Norm* (oder die *Länge*) von v_1.
Für $v_1, v_2 \in V$ sei $d(v_1, v_2) := \| v_1 - v_2 \|$. $d(v_1, v_2)$ heißt der *Abstand* (oder die *Distanz*) zwischen v_1 und v_2.
Vektoren v_1 und v_2 heißen *orthogonal* (oder *senkrecht*) zueinander, wenn $< v_1, v_2 >= 0$.
Schreibweise: $v_1 \perp v_2$.
Der *Winkel* α zwischen zwei Vektoren $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$ ist definiert durch

$$cos\ \alpha := \frac{< v_1, v_2 >}{\| v_1 \| \cdot \| v_2 \|}.$$

11.3 Proposition Sei V ein euklidischer Vektorraum und $x, y, z \in V$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2 < x, y >$ (verallgemeinerter Satz des Pythagoras)

(2) $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2\ (\| x \|^2 + \| y \|^2)$ (Parallelogrammgleichung)

(3) $|< x, y >| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$. Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

(4) $\| \lambda\, x \| = | \lambda | \cdot \| x \|$
$\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$ (Dreiecksungleichung)
$\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Eigenschaft der Norm)

(5) $d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)
$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Eigenschaften des Abstands)

11.4 Definition Sei V ein euklidischer Vektorraum.

(a) Zwei Untervektorräume U_1 und U_2 heißen *orthogonal* $:\Leftrightarrow \forall\ v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$ gilt $v_1 \perp v_2$. Schreibweise $U_1 \perp U_2$

(b) Sei U ein Untervektorraum. Das *orthogonale Komplement* $U^{\perp}$ zu U ist definiert als $U^{\perp} := \{v_1 \in V : v_1 \perp u_1 \forall\ u_1 \in U\}$.

(c) Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren heißt
orthogonal:$\Leftrightarrow \forall\ i \neq j; v_i \perp v_j$
orthonormal:$\Leftrightarrow$ orthogonal und $\| v_i \| = 1\ \forall\ i \in I$
Orthonormalbasis (ONB) $:\Leftrightarrow$ orthonormal und eine Basis

11.5 Algorithmus zur Orthonormalisierung einer Basis (Verfahren von Gram und Schmidt): Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum mit Basis $u_1, \ldots, u_n$. Dann erzeugt das folgende Verfahren eine
ONB $w_1, \ldots, w_n$ von U. Für jedes l mit $1 \leqslant l \leqslant n$ gilt sogar:
$Span\ (u_1, \ldots, u_l) = Span\ (w_1, \ldots, w_l)$.

Start: u_1, setze

$$w_1 := \frac{u_1}{\| u_1 \|}.$$

2.Schritt: Sei $v_2 := < w_1, u_2 > w_1$.

$$w_2 := \frac{u_2 - v_2}{\| u_2 - v_2 \|}.$$

3.Schritt: $v_3 := < w_1, u_3 > w_1 + < w_2, u_3 > w_2$.

$$w_3 := \frac{u_3 - v_3}{\| u_3 - v_3 \|}.$$

11.6 Definition Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit Basis $b_1, \ldots, b_n$ und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, d.h. $(B1), (B2)$ und (S) gelten, aber vielleicht nicht (P) . Die Matrix $M(s)$ mit Einträgen $s(b_i, b_j)$ heißt *darstellende Matrix* von s.

11.7 Proposition Die Zuordnung $s \mapsto M(s)$ ist eine bijektive Abbildung von der Menge der symmetrischen Bilinearformen $s : V \times V \to \mathbb{R}$ auf die Menge der symmetrischen $dim\ V \times dim\ V-$ Matrizen.

11.8 Definition Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\alpha : V \to V$ ein Endomorphismus. α heißt *orthogonal*, wenn $\forall\ v_1, v_2 \in V :< \alpha(v_1), \alpha(v_2) > = < v_1, v_2 >$.

11.9 Proposition Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar. Dann sind äquivalent:

(a) $A^{-1} = A^T$

(b) Die Spaltenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, bzgl. Standardskalarprodukt.

(c) Die Zeilenvektoren von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, bzgl. Standardskalarprodukt

Solche Matrizen A heißen *orthogonal*.
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und B eine Orthonormalbasis von V. Sei $\varphi : V \to V$ linear. Dann ist φ eine orthogonale Abbildung genau dann, wenn die darstellende Matrix A bezüglich der ONB B eine orthogonale Matrix ist.

11.10 Theorem Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Raum und $\varphi : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus. Dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, bezüglich derer die darstellende Matrix von φ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& \boxed{} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& \boxed{} \end{pmatrix}$$

wobei die Kästchen 2×2-Matrizen zu Drehungen sind.

11.11 Theorem Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine orthogonale Matrix S, so dass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist.

Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ ist definiert durch:

$<,>: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$
$< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}\, y_j$

Dann gilt: $< \vec{x}, \vec{x} >= \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j}\, x_j = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 > 0$ für $\vec{x} \neq 0$.

$< \lambda\vec{x}, \vec{y} >= \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda x_j}\, y_j = \overline{\lambda} < \vec{x}, \vec{y} >$

$< x,y >= \overline{< y,x >}$

Das definiert eine *Hermitische Form*. Wenn die Hermitische Form positiv definit ist, heißt sie auch Skalarprodukt.

$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{C}^n$
$A = A^T symmetrisch$	$A = \overline{A^T} Hermitisch$
$< x,y >= x^T Ay$	$< x,y >= \overline{x^T} Ay$
orthogonale Matrix	*unitäre* Matrix
$A^T = A^{-1}$	$\overline{A}^T = \overline{A^T} = A^{-1}$

11.12 Proposition Sei $A \in Mat(n \times n, \mathbb{C})$ eine Hermitische Matrix, d.h. $\overline{A^T} = A$.

(a) Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$:$< Ax, y >=< x, Ay >$.

(b) Alle Eigenwerte von A sind reell.

Geometrische Anwendungen:

(1.) Seien $s \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und v in $\mathbb{R}^2$ gegeben. $g = \{u \in \mathbb{R}^2 :< s, u - v >= 0\}$ beschreibt eine Gerade. Wenn $\| s \|= 1$ gewählt wird, ist diese Form die *Hessesche Normalform* der Geraden g.

Für beliebiges $u \in \mathbb{R}^2$ ist $|< s, u - v >|$ der Abstand von u zur Geraden g.

s heißt *Normalenvektor* zu g.

(2.) Hauptachsentransformation bei Quadriken (Kegelschnitten)
$\frac{x^2}{g} + \frac{y^2}{2^5} = 1 \rightsquigarrow$ Ellipse. $x-$ und $y-$Achse sind "Hauptachsen"

$\frac{x^2}{g} - \frac{y^2}{2^5} = 1 \rightsquigarrow$ Hyperbel. Dieselben Hauptachsen.

$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1?$
$5x^2 + 8xy + 5y^2 = (x,y) \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = A$ hat charakteristisches Polynom $(t-1)(t-9) \Rightarrow EW$ 1 und 9

EV zu $1 : \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = w_1$ EV zu $9 : \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = w_2$

Bezüglich dieser Basis ist die Matrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist orthogonal $\Rightarrow S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$A = SDS^T \Rightarrow$ (neue Koordinaten)$1 = x^T Ay = x^T SDS^T y = 1(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2 + 9(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2 \Rightarrow$ Ellipse, deren Hauptachsen durch w_1 und w_2 gegeben sind.