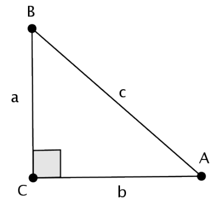
1 Dreiecke - der Satz des Pythagoras

Theorem 1.1.

(a) (Satz von Pythagoras) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse der Länge c (gegenüber dem rechten Winkel) und Katheten der Länge a und b. Dann gilt $c^2 = a^2 + b^2$.



(b) (Umkehrung des Satzes von Pythagoras) Sei ABC ein Dreieck mit "Hypotenuse"(längste Kante) der Länge c und weiteren Kantenlängen a und b, wobei gilt, dass $c^2 = a^2 + b^2$, dann ist der der Hypotenuse gegenüberliegende Winkel ein rechter Winkel.

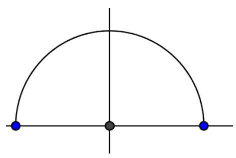
Buch I beginnt mit "Definitionen", z.B.

I. Ein <u>Punkt</u> ist etwas, das keine Teile hat.

II. Eine <u>Strecke</u> ist Länge ohne Breite.

III. Die Enden einer Strecke sind Punkte.

X. Wenn eine Strecke, die auf einer anderen Strecke steht, die angrenzenden Winkel gleich macht, heißen diese <u>rechte Winkel</u> und die beiden Strecken heißen <u>senkrecht</u> zueinander.



XI. Ein <u>stumpfer Winkel</u> ist ein Winkel, der größer ist als ein rechter Winkel.

XII. Ein <u>spitzer Winkel</u> ist ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter Winkel.

„Axiome“

I. Zwischen zwei Punkten gibt es eine Strecke.

II. Eine Strecke (endlich) ist Teil einer Geraden (unendlich).

III. Zu jeder Wahl von Mittelpunkt und Radius gibt es einen Kreis..

Definition 1.2. Sei K ein Körper. Ein <u>affiner Raum</u> über K ist ein Tripel (A, V, τ), wobei $A \neq \varnothing$ eine Menge ist, V ein K-Vektorraum und $\tau : V \longrightarrow Abb(A, A)$ eine Abbildung, für die gilt:

$\forall u \in V$ ist $\tau_u := \tau(u) : A \to A$ bijektiv

$\forall p, q \in A, \exists! u \in V : \tau_u(p) = q$ (V operiert „einfach transitiv“)

$\forall u, v \in V\ \forall p \in A : \tau_{u+v}(p) = \tau_u(\tau_v(p))$ (τ ist ein Gruppenhomomorphismus)

Formal erlaubt man, um Fallunterscheidungen auszuschließen, auch $A = \varnothing$, als affinen Raum.
$0 + v = v \Rightarrow \tau_0(\tau_v(p)) = \tau_v(p) \Rightarrow \tau_0 = id$

Die Elemente von A heißen Punkte.

Die Dimension von A ist definiert als $dimA := dimV$.

Die Eindeutigkeit von $u \in V$ mit $\tau_u(p) = q$ bei gewähltem $p, q \in A$ erlaubt es, u als "Verbindungsvektor"von p und q zu betrachten. Bezeichnung $\overrightarrow{pq} = u$. Das heißt, es gibt eine Abbildung $\underset{(p,q)\mapsto\overrightarrow{pq}}{A \times A \to V}$ mit folgenden Eigenschaften:

Für p, q, r drei paarweise verschiedene Punkte gilt: $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$

Und $\forall p \in A \ \forall u \in V \ \exists! q \in A$ mit $u = \overrightarrow{pq}$.

Proposition 1.3. Sei K ein Körper, $A \neq \emptyset$ eine Menge und V ein $K-$Vektorraum. Dann ist A genau dann ein affiner Raum, wenn es eine Abbildung $\underset{(p,q)\mapsto\overrightarrow{pq}}{A \times A \to V}$ gibt, so dass gilt:
$\forall p, q, r \in A$ paarweise verschieden: $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$

$\forall p \in A \ \forall u \in V \ \exists! q \in A : u = \overrightarrow{pq}, \quad u = 0 \Leftrightarrow p = q.$

Dritte äquivalente Definition von affinem Raum: Es gibt eine Abbildung $\underset{(u,p)\mapsto q:=p+u}{V \times A \to A}$, so dass gilt:

(A 1) $p + (u + v) = (p + u) + v \ \forall p \in A, u, v \in V$.

(A 2) $p + 0 = p \ \forall p \in A$.

(A 3) $p + u = p$ für ein $p \in A \Rightarrow u = 0$.

(A 4) $\forall p, q \in A \ \exists u \in V : q = p + u$.

Definition 1.4. Sei (A, V, τ) ein affiner Raum. Eine Teilmenge $B \subset A$ heißt affiner Unterraum:$\Leftrightarrow$ $\exists p_0 \in A : U := \{\overrightarrow{p_0q} : q \in B\}$ ist ein Untervektroraum von V.
Mit dieser Definition ist $B = \{\tau_u(p_0) : u \in U\}$, d.h. B ist die Bahn von p_0 unter der Operation des Unterraums U.

Definition 1.5. Ein angeordneter Körper ist ein Paar (K, P), wobei K ein Körper ist und P eine Teilmenge von K, so daß gilt:

(a) $\forall a, b \in P : a + b \in P, a \cdot b \in P$.

(b) $\forall a \in K : a \in P$ oder $a = 0$ oder $-a \in P$, aber nicht zwei dieser Eigenschaften gleichzeitig

Die Elemente von P heißen positiv.

Proposition 1.6. Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Dann gilt:

(a) $1 \in P$, d.h. 1 ist positiv.

(b) K hat Charakteristik 0, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot 1 := \overbrace{1 + \ldots + 1}^{n\text{-mal}} \neq 0$ in K.

(c) $\forall a \in K - \{0\} : a^2 \in P$.

Definition 1.7. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform $<,>$: $\underset{(v_1,v_2)\mapsto <v_1,v_2>}{V \times V \to \mathbb{R}}$ heißt Skalarprodukt.
Ein euklidischer Vektorraum ist ein Paar $(V, <,>)$ bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem Skalarprodukt $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$.

Proposition 1.8. Sei $(V, <,>)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt:

(a) Die Abbildung: $\underset{v\mapsto ||v||:=\sqrt{<v,v>}}{||\cdot|| : V \to \mathbb{R}}$ ist eine Norm, d.h.

$||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v|| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in V.$
$||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v|| \; \forall u, v \in V$
$||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

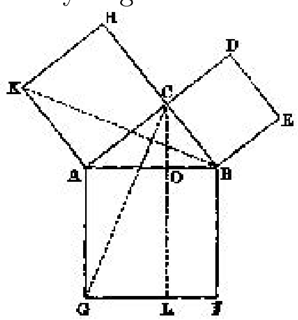
(b) Die Abbildung d : $\underset{(u,v)\mapsto d(u,v):=||u-v||}{V \times V \to \mathbb{R}}$ ist eine Metrik, d.h.

$d(u, v) = d(v, u) \; \forall u, v, \in V$ (Symmetrie)
$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v) \; \forall u, v, w \in V$ (Dreiecksungleichung)
$d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v \; \forall u, v \in V.$

Mit dem Skalarprodukt können wir Winkel definieren durch
$cos\vartheta := \frac{<u,v>}{||u||\cdot||v||}$ für $u, v \neq 0$.

Euklids Proposition I.1: Auf einer gegebenen Strecke soll ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden.
Euklids Proposition I.2: Gegeben sind ein Punkt und eine Strecke. Aufgabe: Konstruiere eine Strecke, die den gegebenen Punkt als Endpunkt hat und gleich lang ist wie die gegebene Strecke.

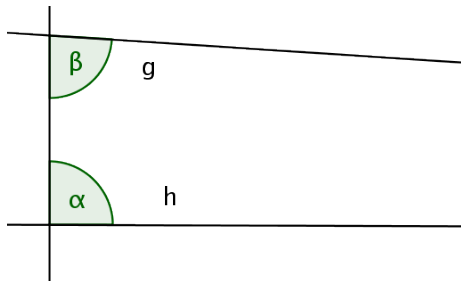
Zu Pythagoras:

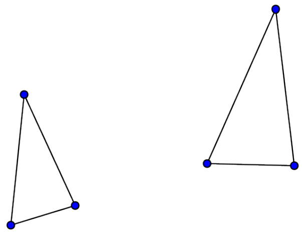


2 Axiome und Grundbegriffe

Ein Axiom wurde schon zu Euklids Zeiten als problematisch angesehen. Euklids Axiom I.5 ist das Parallelenaxiom:

Wenn eine gerade Linie j zwei gerade Linien g und h trifft, so daß die inneren Winkel α und β auf derselben Seite weniger sind als zwei rechte Winkel, dann treffen sich die beiden geraden Linien, wenn sie beliebig verlängert werden, auf der Seite der beiden Winkel α und β.





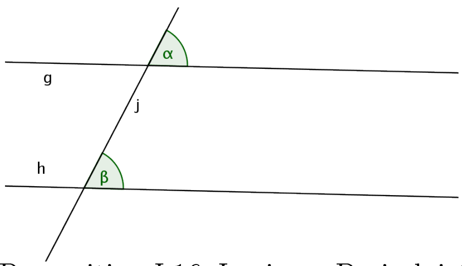
Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ heißen ähnlich, wenn sie dieselben Winkel haben.

Das Axiom von Wallis sagt: Gegeben seien ein Dreieck ABC und eine Strecke DE. Dann existiert ein ähnliches Dreieck $A'B'C'$, so daß die Seite $A'B'$ mindestens so lang ist wie DE.

Modernes Parallelaxiom:

Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt $P \in g$. Dann gibt es genau eine Gerade h, die P enthält und g nicht schneidet.

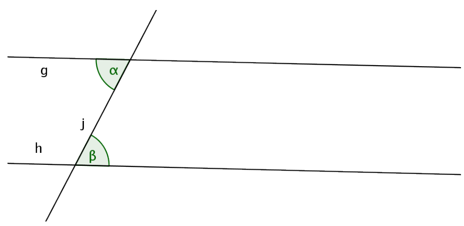
Euklids Definition I.23: Parallele Geraden sind zwei Geraden in derselben Ebene, die einander nicht schneiden.



Euklids Proposition I.27 beginnt: Gegeben ist eine Gerade j, die die Geraden g und h so schneidet, daß die entgegengesetzten Winkel α und β übereinstimmen. Dann sind g und h parallel zueinander.

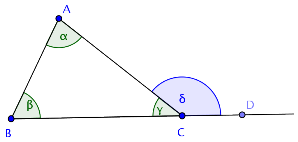
Euklids Proposition I.16: In einem Dreieck ist der Außenwinkel größer als der Innenwinkel und der entgegengesetzte Winkel.

Euklids Proposition I.29: Gegeben sind zwei Parallelen g und h und eine Gerade j, die g und h schneidet. Dann sind die Winkel α und β gleich.



Charakterisierung von Parallelen: $g||h \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Euklids Proposition I.31: Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt A. Dann existiert eine Parallele h zu g, die den Punkt A enthält.



Euklids Proposition I.32: In einem Dreieck ABC gilt: $\underbrace{\delta}_{=\,\text{Außenwinkel an } C} = \alpha + \beta$ und $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

3 Hilberts Axiome

Definition 3.1. Sei E eine Menge und $G \subset \mathcal{P}(E)$ eine Menge von Teilmengen von E. Das Paar (E, G) heißt Inzidenzebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(I 1) $\forall A, B \in E$ mit $A \neq B$ $\exists! g \in G : A, B \in g$.

(I 2) $\forall g \in G$ $\exists A, B \in g$ mit $A \neq B$.

(I 3) $\exists A, B, C \in E$ $\forall g \in G : \{A, B, C\} \not\subset g$.

Die Elemente von E heißen Punkte, die Elemente von G heißen Geraden.

(P) Playfairs Axiom: Sei g eine Gerade, A ein Punkt mit $A \notin g$. Dann gibt es höchstens eine Gerade h mit $A \in h$ und $g \cap h = \varnothing$.

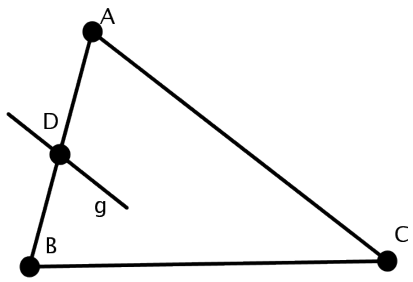
Zwei Inzidenzebenen (E, G) und (E', G') sind zueinander isomorph $:\Leftrightarrow$ $\exists$ Bijektion $\varphi : E \to E'$, so dass φ eine Bijektion auf der Menge der Geraden induziert, d.h. $\forall g \in G : \varphi(g) \in G'$ und $\forall g' \in G'$ $\exists g \in G : \varphi(g) = g'$. φ heißt dann Isomorphismus. Ein Automorphismus von (E, G) ist ein Isomorphismus $\varphi : (E, G) \to (E, G)$. Die Automorphismen von (E, G) bilden eine Gruppe.

Definition 3.2. Sei(E, G) eine Inzidenzebene. Eine Teilmenge $Z \subset E \times E \times E$ heißt Anordnungsrelation genau dann, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind, wobei wir $A * B * C$ für $(A, B, C) \in Z$ schreiben oder "B liegt zwischen A und C ".

(Z 1) $A * B * C \Rightarrow A, B, C$ sind drei verschiedene Punkte, die auf einer Geraden liegen, und es gilt auch $C * B * A$.

(Z 2) $\forall A \neq B$ $\exists C : A * B * C$.

(Z 3) Wenn A, B und C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden sind, dann liegt genau einer der drei Punkte zwischen den anderen beiden.



(Z 4) (Pasch) Seien A, B und C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, und g eine Gerade, die weder A noch B noch C enthält. Falls g einen Punkt D enthält, der zwischen A und B liegt, dann enthält g entweder einen Punkt zwischen A und C oder einen Punkt zwischen B und C, aber nicht beides.

Definition 3.3.

(a) Seien A und B verschiedene Punkte. Die Strecke $\overline{AB}$ ist definiert als $\overline{AB} := \{C : A * C * B\} \cup \{A, B\}$.

(b) Seien A, B und C drei verschiedene Punkte, die nicht kollinear sind (d.h. nicht auf einer Geraden liegen). Das Dreieck ABC ist definiert als das ungeordnete Tripel $(\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC})$. Die Punkte A, B, C heißen Ecken des Dreiecks, die Strecken $\overline{AB}, \overline{BC}$ und $\overline{AC}$ heißen die Kanten des Dreiecks.

Theorem 3.4. Sei $(\mathcal{E}, G)$ eine Inzidenzebene mit einer Anordnungsrelation. Sei $g \in G$.

(a) Die Menge $\mathcal{E} - g$ lässt sich schreiben als $\mathcal{E} - g = S_1 \dot{\cup} S_2, S_1 \neq \varnothing, S_2 \neq \varnothing$, so dass gilt:

(a 1) Zwei Punkte $A, B \notin g$ liegen beide in S_1 oder beide in S_2 genau dann, wenn $\overline{AB} \cap g = \varnothing$.

(a 2) Zwei Punkte $A, C \notin g$ liegen in verschiedenen Teilmengen (einer in S_1, der andere in S_2) genau dann, wenn $\overline{AC} \cap g = \{\text{Punkt}\}$.

Wir nennen S_1 und S_2 die beiden Seiten von g. Im Fall (a 1) sagen wir "A und B liegen auf derselben Seite von g", im Fall (a 2) sagen wir "A und C liegen auf entgegengesetzten Seiten von g."

(b) Sei $A \in g$. Dann ist $g - \{A\} = T_1 \dot{\cup} T_2, T_1 \neq \varnothing, T_2 \neq \varnothing$, so dass gilt:

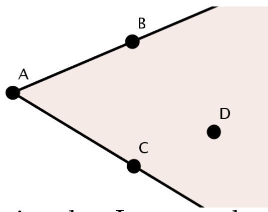
(b 1) $B, C \in g - \{A\}$ liegen beide in T_1 oder beide in T_2 genau dann, wenn $A \notin \overline{BC}$.

(b 2) $B, D \in g - \{A\}$ liegen in verschiedenen Teilmengen genau dann, wenn $A \in \overline{BD}$.

T_1 und T_2 heißen dann die Seiten von A auf g.

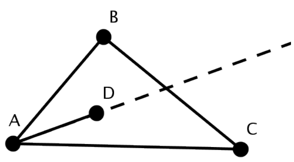
Definition 3.5. A und B seien zwei verschiedene Punkte. Der Strahl $\overrightarrow{AB}$ ist definiert als $\overrightarrow{AB} := \{A\} \cup \{C : C$ liegt auf der Geraden durch A und B und auf derselben Seite von A wie $B\}$. Der Punkt A heißt der Ursprung des Strahls. Ein Winkel besteht aus zwei Strahlen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, die denselben Ursprung haben, aber nicht auf derselben Geraden liegen. Bezeichnung: $\sphericalangle BAC$.

Das Innere eines Winkels $\sphericalangle BAC$ ist die Menge $\{D : D$ und C liegen auf derselben Seite der Geraden durch A und B, und D und B liegen auf derselben Seite der Geraden durch A und $C\}$.

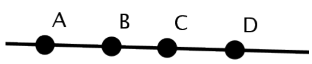


Sei ABC ein Dreieck. Das Innere des Dreiecks ist der Durchschnitt des Inneren der Winkel $\sphericalangle BAC, \sphericalangle ABC, \sphericalangle ACB$.

Proposition 3.6. Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Dann gilt $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} \neq \varnothing$.



Proposition 3.7. In einer Inzidenzebene mit Anordnungsrelation gilt:



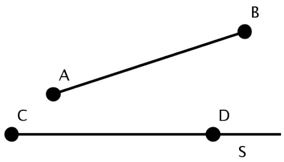
(a) Seien A, B, C, D vier verschiedene Punkte auf einer Geraden. Dann gilt:

$A * B * C$ und $B * C * D \Rightarrow A * B * D$ und $A * C * D$.
$A * B * D$ und $B * C * D \Rightarrow A * B * C$ und $A * C * D$.

(b) Auf jeder Geraden liegen unendlich viele verschiedene Punkte.

(c) $\forall A, B, A \neq B\ \exists C : A * C * B$.

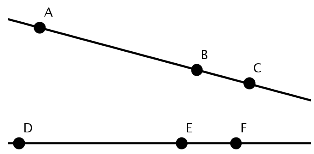
Definition 3.8. Sei $(E, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene, die die Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(E)$ die Menge aller Strecken in E. Eine Relation $R \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ heißt Kongruenz zwischen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, geschrieben $AB \simeq CD$, genau dann, wenn die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

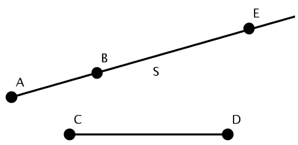


(K 1) Gegeben eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Strahl S, der Ursprung C hat. Dann existiert genau ein Punkt $D \in S$, so dass $AB \simeq CD$.

(K 2) Aus $AB \simeq CD$ und $AB \simeq EF$ folgt $CD \simeq EF$. Jede Strecke ist kongruent zu sich selbst.

(K 3) Gegeben drei Punkte A, B, C auf einer Geraden mit $A * B * C$ und drei weitere Punkte D, E, F auf einer Geraden mit $D * E * F$. Falls $AB \simeq DE$ und $BC \simeq EF$, dann gilt auch $AC \simeq DF$.

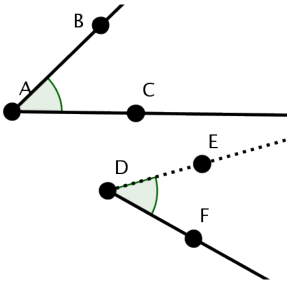




Definition 3.9. Seien AB und CD zwei Strecken und S der Strahl auf der Geraden AB, der B als Ursprung hat und alle Punkte von AB enthält, die von A aus auf der anderen Seite von B liegen. Sei E der nach (K 1) eindeutig existierende Punkt auf S, so dass $CD \simeq BE$. Dann heißt die Strecke AE die Summe der Strecken AB und CD. Schreibweise $AE = AB + CD$.

Definition 3.10. Seien AB und CD Strecken. Wenn es einen Punkt E gibt mit $C * E * D$, so dass $AB \simeq CE$, dann sagen wir AB ist kleiner als CD. Schreibweise $AB < CD$, und CD ist größer als AB, Schreibweise $CD > AB$.

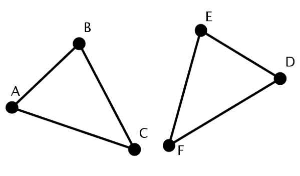
Definition 3.11. Sei $(E, \mathcal{G})$ eine Inzidenzebene, die die Anordnungsaxiome erfüllt. Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Winkel in E. Eine Relation $R \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ heißt Kongruenz zwischen Winkeln $\sphericalangle ABC$ und $\sphericalangle DEF$, geschrieben $\sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle DEF$, genau dann, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

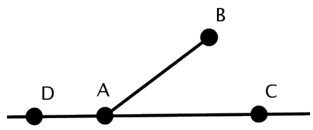


(K 4) Gegeben ein Winkel $\sphericalangle BAC$ und ein Strahl $\overrightarrow{DF}$. Dann existiert genau ein Strahl $\overrightarrow{DE}$ auf einer gegebenen Seite der Geraden DF, so dass $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle EDF$.

(K 5) Für drei Winkel α, β und γ folgt aus $\alpha \simeq \beta$ und $\alpha \simeq \gamma$, dass $\beta \simeq \gamma$. Jeder Winkel ist zu sich selbst kongruent.

(K 6) ($\mathcal{SWS}$) Gegeben zwei Dreiecke ABC und DEF mit $AB \simeq DE, AC \simeq DF$ und $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle EDF$. Dann gilt: $BC \simeq EF, \sphericalangle ABC \simeq \sphericalangle DEF$ und $\sphericalangle ACB \simeq \sphericalangle DFE$.
In der Situation von (K 6) nennen wir die beiden Dreiecke ABC und DEF kongruent.

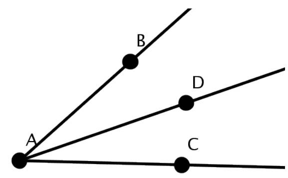




Definition 3.12. Sei $\sphericalangle BAC$ ein Winkel und D ein Punkt auf der Geraden AC, aber auf der anderen Seite von A als C. Dann sagen wir, die Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BAD$ ergänzen einander, und $\sphericalangle BAD$ ist der Ergänzungswinkel = Komplementwinkel zu $\sphericalangle BAC$.

Proposition 3.13. Seien $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BAD$ sowie $\sphericalangle B'A'C'$ und $\sphericalangle B'A'D'$ zwei Paare von einander ergänzenden Winkeln. Aus $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle B'A'C'$ folgt $\sphericalangle BAD \simeq \sphericalangle B'A'D'$.

Proposition 3.14. Sei $\sphericalangle BAC$ ein Winkel und der Strahl $\overrightarrow{AD}$ im Inneren des Winkels $\sphericalangle BAC$. Seien $\sphericalangle D'A'C' \simeq \sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle B'A'D' \simeq \sphericalangle BAD$, und die Strahlen $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ seien auf entgegengesetzten Seiten der Geraden $A'D'$. Dann bilden die Strahlen $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ einen Winkel, so dass $\sphericalangle B'A'C' \simeq \sphericalangle BAC$, und $\overrightarrow{A'D'}$ liegt im Inneren des Winkels $\sphericalangle B'A'C'$.



Definition 3.15.

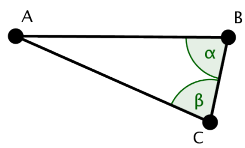
(a) Ein Winkel $\sphericalangle BAC$ ist kleiner als $\sphericalangle EDF$, geschrieben $\sphericalangle BAC < \sphericalangle EDF$ oder $\sphericalangle EDF > \sphericalangle BAC$ ($\sphericalangle EDF$ ist größer als $\sphericalangle BAC$) genau dann, wenn ein Strahl $\overrightarrow{DG}$ im Inneren des Winkels $\sphericalangle EDF$ existiert, so dass $\sphericalangle BAC \simeq \sphericalangle GDF$.

(b) Ein Winkel α heißt rechter Winkel $:\Leftrightarrow \exists$ Ergänzungswinkel β zu α mit $\alpha \simeq \beta$.

Proposition 3.16. Seien α und α' rechte Winkel. Dann gilt $\alpha \simeq \alpha'$.

Definition 3.17. Eine Inzidenzebene, die die Axiome (I 1) bis (I 3), (Z 1) bis (Z 4) und (K 1) bis (K 6) erfüllt, heißt Hilbert-Ebene.

Die Geometrie der Hilbert-Ebene heißt neutrale Geometrie.



Euklid Proposition I.5: In einem gleichschenkligen Dreieck stimmen die Winkel an der Basis überein: $\alpha = \beta$.

Definition 3.18. Seien M und A zwei verschiedene Punkte. Der Kreis Γ um M mit Radius MA ist definiert als $\Gamma := \{B : B \text{ Punkt mit } MB \simeq MA\}$. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des Kreises, MA ist der Radius.

Lemma 3.19. Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MA, und sei Γ' ein Kreis mit Mittelpunkt M' und Radius $M'A'$. Wenn $\Gamma = \Gamma'$ (als Punktmenge), dann ist $M = M'$. D.h. der Mittelpunkt eines Kreises ist eindeutig bestimmt.

Definition 3.20.

(a) Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MA. Ein Punkt B liegt im Inneren von Γ (oder innerhalb von Γ), wenn $B = M$ oder $MB < MA$ gilt. Ein Punkt C liegt außerhalb von Γ, wenn $MA < MC$.

(b) Eine Gerade g ist eine Tangente an einen Kreis Γ (oder tangential an Γ), wenn $\Gamma \cap g$ aus genau einem Punkt besteht.
Ein Kreis Γ ist tangential an einem anderen Kreis Γ' (oder berührt Γ'), wenn Γ und Γ' genau einen Punkt gemeinsam haben.

Proposition 3.21. Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius MA.

(a) Sei g die Gerade durch den Punkt A, die senkrecht auf MA steht. Dann ist g eine Tangente an Γ und die Punkte von $g - \{A\}$ liegen außerhalb von Γ.

(b) Sei h eine Tangente an Γ im Punkt A. Dann ist h senkrecht zu MA.

(c) An jedem Punkt A des Kreises Γ gibt es genau eine Tangente zu Γ.

(d) Wenn eine Gerade j einen Punkt A von Γ enthält, aber keine Tangente ist, dann trifft sie Γ in genau zwei Punkten.

Proposition 3.22.

(a) Seien M, M' und A drei verschiedene kollineare Punkte. Dann gilt: Der Kreis Γ mit Mittelpunkt M und Radius MA berührt den Kreis Γ' mit Mittelpunkt M' und Radius $M'A$.

(b) Wenn zwei Kreise Γ und Γ' sich im Punkt A berühren, dann sind ihre Mittelpunkte M und M' kollinear mit A.

(c) Wenn zwei verschiedene Kreise den Punkt A gemeinsam haben, aber nicht tangential sind, dann haben sie genau zwei Punkte gemeinsam.

(E) (oder$(\mathcal{KKS})$). Seien Γ und Γ' zwei Kreise, so dass Γ' mindestens einen Punkt im Inneren von Γ enthält und mindestens einen Punkt außerhalb von Γ. Dann schneiden sich Γ und Γ'.

Proposition 3.23. Eine Hilbert-Ebene erfülle (E). Die Gerade g enthalte einen Punkt A im Inneren eines Kreises Γ. Dann schneidet g den Kreis Γ.

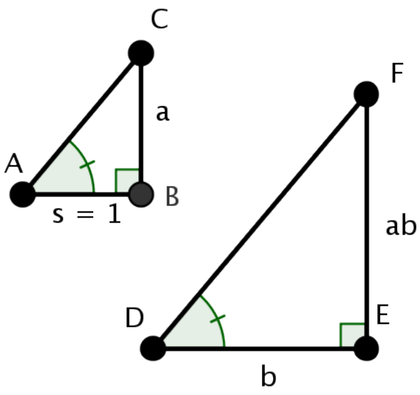
Definition 3.24. Eine Hilbert-Ebene, die (E) und (P) erfüllt, heißt <u>Euklidische Ebene</u>.

<u>Euklids Proposition X.1</u>: Seien X und Y zwei Größen, $X > Y$. Wenn man von X mindestens die Hälfte abzieht und vom Rest wieder mindestens die Hälfte, und diesen Prozess wiederholt, erhält man eine Größe, die kleiner ist als Y.

<u>Dedekindsche Schnitte</u>: $\mathbb{Q} = K \,\dot\cup\, G, K \neq \varnothing \neq G$, $\forall x \in K, y \in G : x < y$, und G hat kein kleinstes Element.

<u>Dedekinds Axiom (D)</u>: Sei g eine Gerade und $g = S \,\dot\cup\, T$ mit $S \neq \varnothing \neq T$ so, dass kein Punkt in S zwischen zwei Punkten in T liegt und kein Punkt in T zwischen zwei Punkten in S. Dann gibt es genau einen Punkt P so, dass $\forall A \in S, B \in T$ gilt: Entweder $A = P$ oder $B = P$ oder $A * P * B$.

4 Von synthetischer Geometrie zu Koordinaten

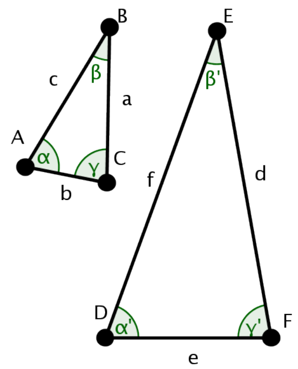


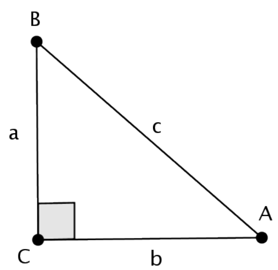
Definition 4.1. Seien a und b Kongruenzklassen von Strecken. Dann ist das Produkt $a \cdot b$ definiert als die Kongruenzklasse der Strecke EF in folgender Konstruktion: Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit $AB \in 1$ und $BC \in a$, rechtem Winkel bei B, und sei $\alpha := \sphericalangle BAC$. Sei DEF ein weiteres rechtwinkliges Dreieck mit $DE \in b, \sphericalangle EDF = \alpha$ und rechtem Winkel bei E. Dann ist $EF \in a \cdot b$.

Proposition 4.2. Zu einer Hilbert-Ebene, die (P) erfüllt, existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiger angeordneter Körper K, dessen Menge P positiver Elemente genau die Menge der Kongruenzklassen von Strecken in der Hilbert-Ebene mit den obigen Operationen $+, \cdot$ ist.

Theorem 4.3. Jede Hilbert-Ebene, die (P) erfüllt, ist isomorph zur Koordinatenebene K^2, wobei der angeordnete Körper K durch die Addition und Multiplikation definiert wird.

Theorem 4.4. Seien ABC und DEF zwei Dreiecke. Dann gilt: $[\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'] \Rightarrow \left[\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}\right]$, d.h. die beiden Dreiecke sind ähnlich genau dann, wenn alle entsprechenden Kanten proportionale Länge haben.





Proposition 4.5. In einem rechtwinkligen Dreieck ABC gilt $a^2 + b^2 = c^2$
(mit $c =$ Hypotenuse).

5 Koordinatenebenen

Theorem 5.1 (Descarters)**.** In der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien $(0,0),(1,0)$ und n Punkte $P_1 = (a_1, b_1), \ldots, P_n = (a_n, b_n)$ gegeben, sowie ein weiterer Punkt $Q = (\alpha, \beta)$. Dann gilt: Der Punkt Q kann mit Zirkel und Lineal aus den Punkten $P_1, \ldots, P_n$ genau dann konstruiert werden, wenn die Zahlen α und β sich aus $0, 1, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ durch endlich viele Operationen der folgenden Art ergeben:

Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division;
Lösung linearer Gleichungen;
Lösung quadratischer Gleichungen (wobei Quadratwurzeln positiver reeller Zahlen gezogen werden dürfen.)

Proposition 5.2. Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar genau dann, wenn es eine Kette von Körpererweiterungen gibt:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n \subseteq \mathbb{R}$$

so dass $K_i = K_{i-1}\,(\sqrt{a_i})$ für ein $a_i \in K_{i-1}$ gilt, und $\alpha \in K_n$. Wenn α konstruierbar ist, dann ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2.

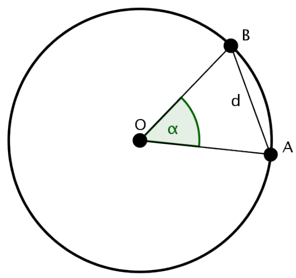
Unlösbare klassische Probleme:

Würfelverdoppelung (Delisches Problem)

Winkeldreiteilung

Quadratur des Kreises

Lemma 5.3. In einem Kreis vom Radius 1 sei am Mittelpunkt O ein Winkel α gegeben. Die Strahlen schneiden den Kreis in A und B. Dann hat die Sehne AB die Länge $d = \sqrt{2 - 2\ cos\ \alpha}$.



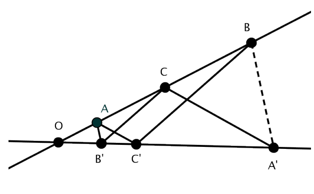
Theorem 5.4. Das reguläre n-Eck ($n \geqslant 3$) ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar genau dann, wenn n die folgende Form hat

$$n = 2^r p_1 \ldots p_s (r, s \geqslant 0),$$

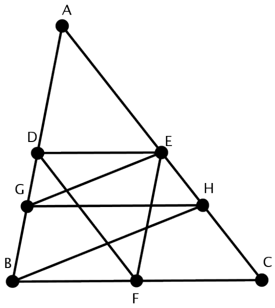
wobei die p_i paarweise verschiedene ungerade Primzahlen sind und jedes p_i eine Fermat-Primzahl ist, d.h. $\exists k : p_i = 2^{2^k} + 1$.

Proposition 5.5. In der Inzidenzebene K^2 gibt es vier verschiedene Punkte A, B, C, D mit $AB||CD, AC||BD$ und $AD||BC$ genau dann, wenn K die Charakteristik zwei hat.

Proposition 5.6 (Satz von Pappus)**.** In der kartesischen Ebene K^2 seien Geraden g und h gegeben, sowie Punkte $A, B, C \in g$ und $A', B', C' \in h$, so dass $AC'||A'C$ und $BC'||B'C$. Dann gilt auch $AB'||A'B$.



K ist kommutativ genau dann, wenn der Satz von Pappus gilt.



Proposition 5.7. Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Dann existiert eine Konfiguration wie im Bild:
(Dreieck ABC, $D, G \in AB$, $E, H \in AC$, $F \in BC$,
$DE || GH || BC$, $DF || AC$, $EF || AB$, $EG || HB$) $\Leftrightarrow \sqrt{2} \in K$.

Proposition 5.8. Sei K ein Körper. Dann gibt es in K^2 genau dann eine Anordnungsrelation, die $(Z1)$ bis $(Z4)$ erfüllt, wenn K ein angeordneter Körper ist.

(A) Gegeben Strecken AB und CD. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\underbrace{AB + \ldots + AB}_{n} > CD.$$

entspricht (A') $\forall\ a \in P \subset K\ \exists\ n \in \mathbb{N} : n > a$.

(D) Sei g eine Gerade, $g = S \dot{\cup} T, S \neq \emptyset, T \neq \emptyset$, so dass kein Punkt in S zwischen zwei Punkten von T liegt und kein Punkt in T zwischen zwei Punkten von S. Dann $\exists!\ P\ \forall\ A \in S, B \in T : A = P$ oder $B = P$ oder $A * P * B$
entspricht: (D') Sei $K = S \dot{\cup} T$ so dass $\forall\ a \in S, b \in T : a < b$. Dann $\exists!\ c \in K$ so dass $\forall\ a \in S, b \in T : a \leqslant c \leqslant b$.
Es gibt angeordnete Körper, die nicht-archimedisch sind.

Proposition 5.9. Sei K ein angeordneter Körper, der (A') erfüllt. Dann ist K isomorph (als angeordneter Körper) zu einem Teilkörper von $\mathbb{R}$. In diesem Fall erfüllt K das Axiom (D') genau dann, wenn der Teilkörper ganz $\mathbb{R}$ ist.

Proposition 5.10. Sei K ein angeordneter Körper und K^2 die zugehörige kartesische Ebene. Dann gelten die Axiome $(K2)$ bis $(K5)$. Das Axiom $(K1)$ gilt genau dann, wenn K die folgende Bedingung erfüllt:

$(*)$ $\forall a \in K\ \exists\ b \in K : 1 + a^2 = b^2$ (K heißt dann ein pythagoreischer Körper).

Proposition 5.11. Sei K ein angeordneter Körper und K^2 die kartesische Ebene. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(I) In K^2 gilt $(E)(= (KKS))$, d.h. $\forall$ Kreise Γ, Γ' so dass Γ' mindestens einen Punkt innerhalb von Γ und mindestens einen Punkt außerhalb von Γ enthält: Γ und Γ' schneiden sich.

(II) In K^2 gilt (KGS) : $\forall\ \Gamma$ Kreis, g Gerade, so dass g mindestens einen Punkt im Inneren von Γ enthält: g schneidet Γ.

(III) K erfüllt $(**) : \forall\ a > 0\ \exists\ b \in K : b^2 = a$.

(Dann heißt K ein euklidischer Körper.)

Der Hilbert-Körper besteht aus den total reellen konstruierbaren Zahlen.

Existenz genügend vieler Kongruenzabbildungen (ERM).

In K^2 gelten: (ERM) und $(K6)$.

In Hilbert-Ebenen gilt (ERM) und $(K6)$.

6 Poincarés Modell der nichteuklidischen Geometrie

K sei ein Körper, der $(**)$ aus 5.11 erfüllt.
In K^2 wählen wir einen Kreis Γ mit Mittelpunkt $0 = (0,0)$.

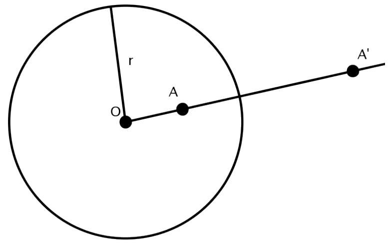
$P-$Punkte sind Punkte in K^2, die im Inneren von Γ liegen.

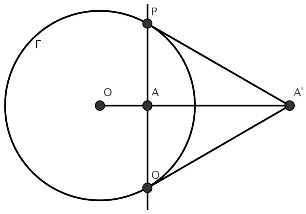
$P-$Geraden:

(a) $\{P-$Punkte auf einer Geraden durch $0\}$.

(b) $\{P-$Punkte auf einem Kreis, der orthogonal zu Γ ist, d.h. Γ mit zwei rechten Winkeln schneidet$\}$.

Definition 6.1. Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius r. Die Inversion an Γ ist eine Abbildung $K^2\backslash\{0\} \to K^2\backslash\{0\}$, die einen Punkt $A \neq 0$ nach der folgenden Vorschrift auf A' abbildet:
A' ist der eindeutig bestimmte Punkt auf dem Strahl $\overrightarrow{0A}$, für den gilt: $0A \cdot 0A' = r^2$.
A' wird als invers zu A bezeichnet.





Proposition 6.2. Sei A ein Punkt innerhalb des Kreises Γ. Sei PQ die Sehne durch A senkrecht auf $0A$. Dann schneiden die Tangenten zu Γ in P und Q die Gerade $0A$ in A', das invers zu A ist.

Theorem 6.3. Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt 0. Dann gilt für die Inversion an Γ:

(a) Eine Gerade durch 0 wird auf sich selbst abgebildet .

(b) Eine Gerade, die 0 nicht enthält, wird abgebildet auf einen Kreis, der 0 enthält.

(c) Ein Kreis, der in beiden Schnittpunkten senkrecht auf Γ steht, wird auf sich selbst abgebildet.

(d) Sei γ ein Kreis, der zwei zueinander inverse Punkte A und A' enthält. Dann steht γ senkrecht auf Γ und wird auf sich selbst abgebildet.

(e) Ein Kreis, der 0 nicht enthält, wird auf einen Kreis abgebildet.

Definition 6.4. Seien A, B, P, Q vier verschiedene Punkte in der Ebene. Ihr Doppelverhältnis ist definiert als $(AB, PQ) := \frac{AP}{AQ}/\frac{BP}{BQ} = \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{BQ}{BP}$

Proposition 6.5. Seien A, B, P, Q vier verschiedene Punkte in der Ebene, alle $\neq 0$, mit Bildern A', B', P', Q' unter der Inversion an Γ. Dann gilt: $(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$.

Proposition 6.6.

(a) Das Poincaré-Modell erfüllt die Inzidenzaxiome (I 1), (I 2) und (I 3).

(b) Das Parallelenaxiom (P) gilt im Poincaré-Modell nicht: Es gibt eine $P-$Gerade γ und einen $P-$Punkt A, so dass mehrere $P-$Geraden existieren, die A enthalten, aber γ nicht schneiden (also zu γ parallel sind.)

Proposition 6.7. Die $P-$Anordnungsrelation erfüllt (Z 1) bis (Z 4).

Definition 6.8. Mit diesen Bezeichnungen heißen die $P-$Strecken AB und $A'B'$ zueinander $P-$kongruent genau dann, wenn die folgende Gleichheit von Doppelverhältnissen gilt:

$$(AB, PQ) = (A'B', P'Q')$$

Proposition 6.9. $P-$Kongruenz erfüllt (K 2) - (K 5).

Proposition 6.10. (ERM) für die Poincaré-Ebene: Im Poincaré-Modell gibt es genügend viele Kongruenzabbildungen, d.h.

(a) Für zwei $P-$Punkte A und B gibt es eine $P-$Kongruenzabbildung, die A auf B abbildet.

(b) Für drei $P-$Punkte A, B, C, so dass AB $P-$kongruent zu AC ist, gibt es eine $P-$Kongruenzabbildung, die A festhält und B auf C abbildet.

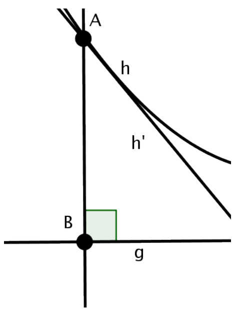
(c) Für eine $P-$Gerade γ gibt es eine $P-$Kongruenzabbildung, die γ punktweise festhält und die beiden Seiten von γ vertauscht.

Korollar 6.11. Das Poincaré-Modell erfüllt die Axiome (K 1) und (K 6).

Proposition 6.12. Die $P-$ Kreise sind genau die gewöhnlichen Kreise, die ganz im Innern von Γ liegen.

Korollar 6.13. In der Poincaré-Ebene gilt (E), d.h. (KKS).

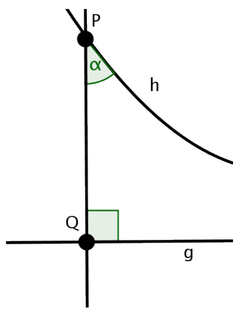
Lemma 6.14. Die Funktion $\mu : (A, B) \mapsto \frac{1}{(AB,PQ)}$ ist eine multiplikative Abstandsfunktion mit Werten in $K_{>0}$.



Definition 6.15. In irgendeiner Ebene sei g eine Gerade und A ein Punkt mit $A \notin g, B \in g, AB \perp g$. Ein Strahl h, der von A ausgeht, heißt Grenzparallele (oder Grenzhalbgerade) zu h (durch A) genau dann, wenn $g \cap h = \varnothing$ und für alle Strahlen h', die (echt) innerhalb des Winkels verlaufen, der von BA und h gebildet wird, gilt: $g \cap h' \neq \varnothing$.

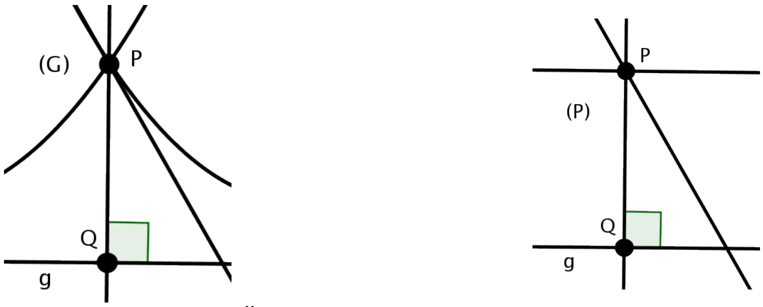
Proposition 6.16. Gegeben seien eine Gerade g, ein Punkt $P \notin g$, die Senkrechte PQ zu g mit $Q \in g$ und eine Grenzparallele h durch P, die mit PQ einen Winkel α bildet. Dann gilt:

$$tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\mu(P, Q)}$$



Definition 6.17. Eine hyperbolische Ebene ist eine Hilbert-Ebene, die das folgende Axiom erfüllt:

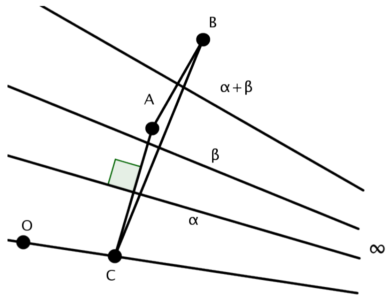
(G) Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann gibt es zwei Grenzhalbgeraden durch P zu g, die auf zwei verschiedenen Seiten der zu g senkrechten Geraden PQ liegen. Diese beiden Halbgeraden liegen nicht auf derselben Geraden.



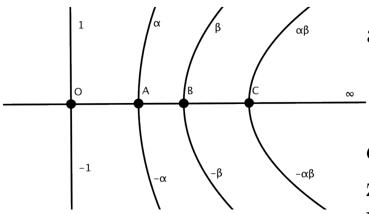
Ein Ende ist nach Definition eine Äquivalenzklasse von Grenzparallelen.

Addition:

α und β Enden $\neq \infty$. Sei $C \in (0, \infty)$, A gespiegelt aus C an (α, ∞), B gespiegelt aus C an (β, ∞). $\alpha + \beta :=$ Ende($\neq \infty$) der Mittelsenkrechten von AB.



Multiplikation:



Wähle eine Senkrechte zu $(0, \infty)$ und nenne sie $(1, -1)$. Gegeben Enden $\alpha, \beta \Rightarrow -\alpha, -\beta$ definiert, also auch $(\alpha, -\alpha), (\beta, -\beta)$, Schnittpunkte mit $(0, \infty)$: A und B, sowie 0 für $(1, -1)$. Sei C auf $(0, \infty)$ so dass $0C = 0A + 0B$ (Abstände mit Vorzeichen positiv: $A \in \overrightarrow{0\infty}$). Durch C geht die Senkrechte zu $(0, \infty)$; ihre Enden sind $\alpha\beta$ und $-\alpha\beta$. Positiv heißt: Auf derselben Seite von $(0, \infty)$ wie 1.

Ergebnis:

- Die Menge der Enden ist ein angeordneter Körper K.
- Zwei hyperbolische Ebenen sind (als Hilbert-Ebenen) isomorph $\Leftrightarrow$ Die angeordneten Körper sind isomorph.
- Eine hyperbolische Ebene ist isomorph zum Poincaré-Modell in K^2, wenn K der zugeordnete angeordnete Körper ist.