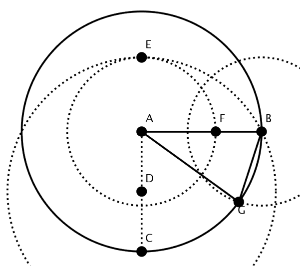
Schulmathematik vom höheren Standpunkt

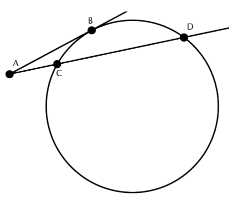
Aufgabe 1: (Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks nach Euklid) Einer der geometrischen Höhepunkte der „Elemente“ Euklids ist seine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks. Diese soll in dieser Aufgabe untersucht werden.



a) Sei eine Strecke AB gegeben und K ein Kreis um A durch B. Sei C ein Punkt auf K, so dass $\angle BAC$ recht ist und D der Mittelpunkt der Strecke AC. Es sei E der Schnittpunkt des Kreises um D durch B mit AC, welcher im Inneren von K liegt, und F der Schnittpunkt des Kreises um A durch E mit der Strecke AB. Sei G der Schnittpunkt des Kreises um B mit Radius $|AF|$ mit K.

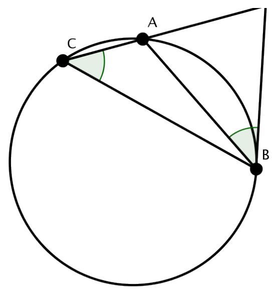
Führen Sie obige Konstruktion mit Zirkel und Lineal aus und zeigen Sie: Das Dreieck ABG ist gleichschenklig und die Basiswinkel ABG und BGA sind jeweils doppelt so groß wie der Winkel GAB. Sie können hierfür die folgenden Resultate Euklids verwenden:

- Der Punkt F teilt nach Euklid II.11 die Strecke AB derart, dass das Reckteck mit den Seiten AB und FB die selbe Fläche hat wie das Quadrat über der Strecke AF (goldener Schnitt).

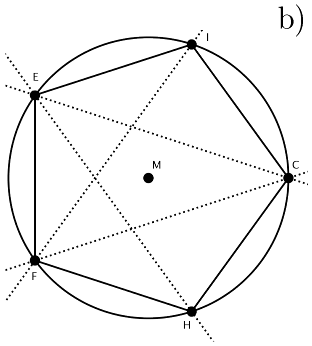


- Euklids III.36 und III.37: Schneidet eine Gerade g einen Kreis in den Punkten C und D, ist A ein Punkt auf g außerhalb des Kreises und h eine weitere Gerade, welche A und einen Punkt B des Kreises enthält, so gilt: Das Rechteck mit Seitenlängen AC und AD hat genau dann den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Strecke AB, wenn h eine Tangente des Kreises ist.

- Euklids III.32: Sei g eine Gerade, welche einen Kreis in A und B schneidet und t die Tangente in B. Es sei α ein Winkel zwischen g und t in B, welcher Punkte des Kreises enthält und C ein Punkt des Kreises im Äußeren von α. Dann sind die Winkel $\angle BCA$ und α kongruent.



- Euklid I. 32: Der Ergänzungswinkel eines Dreieckswinkels ist kongruent zur Summe der beiden anderen Dreieckswinkel.



b) Es sei ABG das Dreieck aus a) und es sei ein Kreis K mit Mittelpunkt M durch einen Punkt C gegeben. Es seien E und F Punkte auf dem Kreis, so dass die Dreiecke ABG und CEF ähnlich sind und die Gerade MC die Winkelhalbierende von $\angle ECF$. Es sei H der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle CEF$ mit K und I der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle EFC$ mit K.

Führen Sie obige Konstruktion mit Zirkel und Lineal aus und zeigen Sie, dass $CIEFH$ ein regelmäßiges Fünfeck bildet.

Aufgabe 2: Es sei K ein euklidischer angeordneter Körper. Es sei Γ ein Kreis in der zugehörigen kartesischen Ebene K^2, welcher den Ursprung als Mittelpunkt hat. Wie lang muss eine Seite eines in Γ eingeschriebenen regelmäßigen Fünfecks sein? Zeigen Sie, dass solch ein Fünfeck konstruierbar ist.

Aufgabe 3: Schneiden Sie aus Papier einen langen, rechteckigen Streifen aus. Binden Sie damit einen Knoten und ziehen Sie diesen (vorsichtig) so weit wie möglich zusammen. Drücken Sie den Knoten anschließend platt und knicken Sie die überstehenden Teile des Streifens zur Seite. Begründen Sie, warum das so entstandene Fünfeck regelmäßig ist.

Zum Abschluss noch was zum Auflockern:
Finden Sie alle Dreiecke, Rechtecke und Kreise auf folgendem Bild.