Fachbereich Mathematik | Blatt 8
S. König/ L. Margolis | WS 2013/14

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

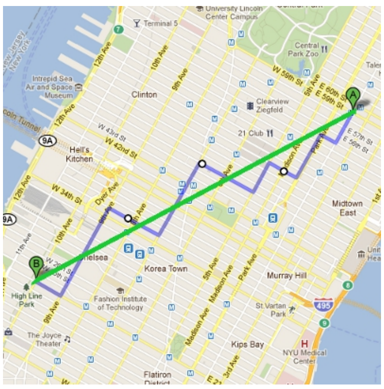
Aufgabe 1: Zeigen Sie den Kongruenzsatz SSS in einer beliebigen Hilbert-Ebene.
Hinweis: Konstruieren Sie ein an einer Seite des ersten Dreiecks „gespiegeltes" Dreieck, welches kongruent zum zweiten ist.

Aufgabe 2 (Schriftlich): Es sei AB eine Strecke in einer Hilbert-Ebene. Zeigen Sie, dass es möglich ist, auf AB ein gleichschenkliges Dreieck zu errichten.

Aufgabe 3: Es seien K_1 und K_2 zwei sich berührende Kreise in einer Hilbert-Ebene. Zeigen Sie, dass K_1 entweder ganz im Inneren von K_2 liegt oder ganz außerhalb.

Aufgabe 4: Entscheiden Sie jeweils, ob es eine Inzidenzebene mit der angegebenen Anzahl an Punkten gibt, welche die angegebene Eigenschaft hat:

Aussage	4	5	7
Eine Gerade hat genau 4 Punkte	□	□	□
Jede Gerade hat genau 3 Punkte	□	□	□
Es gibt keine parallelen Geraden	□	□	□
Zu jeder Geraden gibt es genau eine Parallele	□	□	□
Es gibt parallele Geraden, aber Parallelität ist nicht transitiv	□	□	□



Aufgabe 5: Es sei der $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Menge an Geraden und der üblichen Zwischen-Relation gegeben. Die Kongruenz von Strecken sei mittels der Metrik

$$d(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

definiert. Diese heißt auch „Manhattan"- oder „Taxi"-Metrik, da sie die Entfernung angibt, die ein Taxifahrer in einer Stadt, in der alle Straßen horizontal und vertikal verlaufen, zwischen zwei Punkten zurücklegen muss.

a) Zeigen Sie, dass in dieser Geometrie die Axiome (K1) - (K3) gelten. Welche Punkte liegen auf dem Kreis mit Radius 1 um den Ursprung?

b) Die Winkel zwischen Strecken seien wie im $\mathbb{R}^2$ üblich definiert, also wie in der analytischen Geometrie bzw. Schulgeometrie mittels des Euklidischen Skalarprodukts. Zeigen Sie, dass dann die Axiome (K4) und (K5) gelten, das Axiom (K6) aber nicht. Geben Sie hierzu zwei Dreiecke an, die zwei gleich lange Seiten mit gleichem eingeschlossenem Winkel besitzen, deren jeweils dritte Seite aber verschieden lang ist.